PRIMERA UNIDAD. Materiales fundamentales empleados en Dibujo Técnico

Contenido:
Lápices, plantillas, compases, etc.
Conocimiento de soportes
Técnicas de borrado
Uso correcto de plantillas
Calidad en el acabado

1) Generalidades

Vamos a comenzar a dibujar y por tanto los primero que el alumno debe conocer son los instrumentos de trabajo con que se va a encontrar, la forma correcta de utilizarlos y como consérvalos para obtener de ellos el mayor rendimiento.

El presente tema abordará únicamente el dibujo tradicional, con los instrumentos tradicionales, por cuanto no se abordará el dibujo por ordenador utilizado en el mundo laboral.

2) Instrumentos de dibujo

a) Lapiceros

Aunque en la actualidad se suele dibujar con portaminas, el cual nos evita el engorro de sacar punta a los lápices, con estos se obtiene una mayor precisión en los trazados.

Los lápices suelen ser de sección redonda o hexagonal. Para el dibujo se prefieren estos últimos ya que se evita la tendencia de rodar por la mesa. Construidos en madera blanda. En su interior lleva una mina de carbono cuya dureza define el lápiz.

El dibujante en función del tipo de dibujo deberá elegir la mina adecuada. La dureza de la misma se indica por siglas formadas por letras y números. Según la dureza de las minas tendremos:

7H y 8H: muy dura, poco empleada.
6H y 5H: dura, se emplea para dibujos técnicos muy precisos.
4H, 3H y 2H: semidura, son las más empleadas para dibujos técnicos.
H, HB, B, 2B: blanda, se emplea para croquizar

Fig. 1

Cualquiera que se sea la dureza de la mina empleada, la punta del lápiz ha de estar perfectamente afilada que nos permita un trazado fino y limpio.

Ha de afilarse con bastante frecuencia, para lo

cual emplearemos un sacapuntas o mejor aun un raspador de lija. La punta ha de ser cónica y puntiaguda de 7 a 8 mm. de longitud.
El trazado de las líneas se realizará de izquierda a derecha inclinado el lápiz o portaminas unos 60º en la dirección del trazado. En el caso de los zurdos el trazado será de derecha a izquierda.

b) Portaminas

El portaminas está formado por un tubo que contiene la mina y que en uno de sus extremos dispone de un mecanismo de ajuste. Se pueden encontrar para albergar minas de 0,3 y 0,5 o de 0,7 y 0,9. Al igual que en los lápices las minas se clasifican por su dureza.

Fig.2

c) Regla, Escuadra y cartabón

El juego de la escuadra y cartabón constituye el principal instrumento de dibujo, tanto para el trazado a lápiz como a tinta. Están construidos en celuloide, generalmente verde o gris. No deben de estar graduadas ni tener bisel, ya que esto que en principio parece una ventaja, nos crea mas inconvenientes que las que son rectas. Este tipo de plantillas suelen ser de poca calidad.

Fig.3

La escuadra es un triángulo rectángulo isósceles, sus ángulos son de 45º y 90º.

El cartabón es un triángulo rectángulo cuyos ángulos mides 30º, 60º y 90º.

Para las medidas en el dibujo se debe emplear una regla pequeña llamada doble decímetro, esta regla está biselada en los extremo con la graduación grabada en el bisel. Este instrumento solo debe de emplearse en la toma de medidas y jamás trazar líneas con el mismo y mucho menos emplearlo como guía para cortar con un cuter,

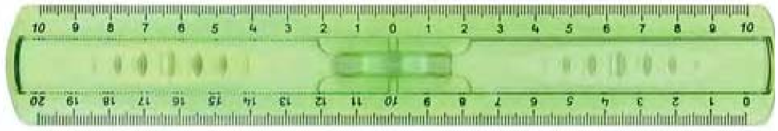


Fig. 4

Para conservar estas plantillas y poder trabajar con la mayor precisión deben de estar limpias. Para ello bastará con lavarlas con cualquier jabón.

d) Compases

El compás es un instrumento con dos patas articuladas, una de ellas termina en una aguja de acero y la otra tiene el elemento trazador, que puede

Fig.5

ser de lápiz o tinta. La mina debe ser semidura afilada en forma de bisel hacia dentro y no de punta.

Para pinchar en el punto exacto se debe guiar la aguja con el dedo, este debe de estar algo mas saliente que la pata que tiene el elemento trazador. Para el uso correcto del compás se deben de observar las siguientes recomendaciones:

1) Afilar las punta en forma de bisel hacia el interior del mismo.
2) Sujetar el compás con los dedos índice y pulgar por el cilindro estriado que este tiene en la parte superior.
3) Manipular las articulaciones de forma de forma que estas queden perpendiculares al plano de trabajo.
4) Inclinar ligeramente el compás al iniciar el trazado.

Cuando las circunferencias que tenemos que trazar sean demasiados pequeñas, será preciso emplear un pequeño compás llamado bigotera.

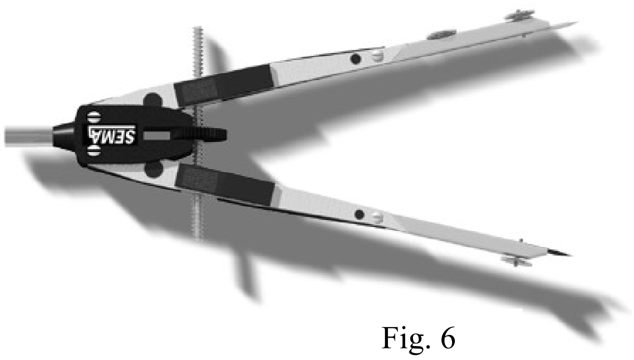


Fig. 6

3) Soportes

El papel es una lámina delgada hecha con pasta de fibras de origen generalmente vegetal, blanqueadas y desleídas en agua, que después se hacen secar y endurecer.

El papel de dibujo se suele presentar en rollos y en pliegos cortados. El espesor del papel está en relación con el peso en gramos por metro cuadrado. La superficie puede ser rugosa y mate o bien lisa y algo brillante.

Cuando dibujemos a lápiz utilizaremos papel rugoso y a tinta liso o satinado.

El papel puede ser opaco, blanco o de color y papel transparente. Este último poco utilizado con la aparición de las fotocopiadoras.

El papel transparente puede ser vegetal y de cebolla. El papel vegetal es de color gris claro azulado. Antes de la aparición de las fotocopiadoras y de los plotes, era empleado para realizar los dibujos originales en los que posteriormente se realizarían las copias heliográficas. Este debía de admitir la tinta y el borrado. Debía de ser muy transparente. Una variedad de este papel es el acetato. Son lisos por ambas caras y transparentes de gran calidad. Son muy resistentes al borrado, a la humedad y al calor. Se emplean para planos topográficos.

4) Técnicas de borrado.

La goma de borrar se emplea para suprimir las partes sobrantes en los dibujos. Las hay para lápiz y para tinta. Las gomas de borrado para lápiz deben de ser blandas e incoloras y blancas. No deben dejar coloreado en el papel. Las punta de la goma debe de permanecer siempre limpia.

Los errores a tinta cuando se dibujaba en papel vegetal se hacían desaparecer raspando con una cuchilla de afeitar de las antiguas. Para ello debe de pasarse la cuchilla completamente vertical al papel. A continuación se pasará una goma y la uña unas cuantas veces. También puede emplearse un borrador con mina de fibra de vidrio.

5) Plantillas

Antes de aparecer los ordenadores, en el comercio habían una infinidad de plantillas para los mas diversos usos. Entre ellas teníamos: Plantillas de curvas (figura 7), de círculos (figura 8), de elipses (Figura 9), plantillas para arquitectura (figura 10), electricidad (figura 11), etc.

Fig.7

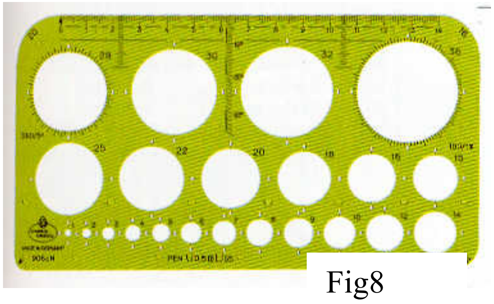


Fig8

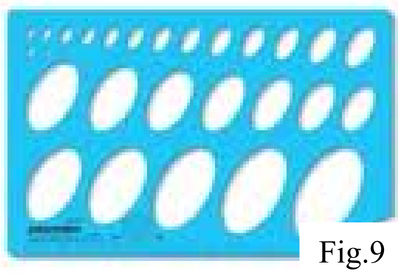


Fig.9

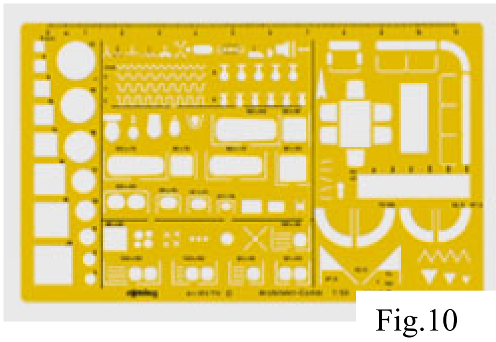


Fig.10

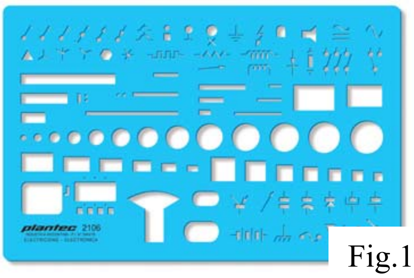


Fig.11

SEGUNDA UNIDAD. Trazados Fundamentales en el Plano

Contenido:
Perpendicularidad
Paralelismo
Mediatrices
Ángulos
Arco Capaz

6) Introducción

Denominamos punto al cruce de dos líneas, este no tiene dimensión. En lo sucesivo lo denominaremos por letras mayúsculas.

Una línea es una sucesión ilimitada de puntos. Cuando estos van en la misma dirección definen una recta. La denominaremos por una letra minúscula.

Si la recta está limitada en uno de sus extremos, estaremos definiendo una semirrecta.

Si se encuentra limitado por los dos extremos será un segmento.

Lugar geométrico en el conjunto de puntos que cumple una determina condición.

Si dos rectas se cortan formando un ángulo de 90º, estas serán perpendiculares.

7) Perpendicularidad

7.1. Rectas perpendiculares. Definición

Dos rectas son perpendiculares cuando se cortan formando ángulos rectos. Dos rectas perpendiculares formarán por tanto cuatro ángulos rectos.

7.2. Trazado de la perpendicular a un segmento en su punto medio. Mediatriz de un segmento. Fig.12.

La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de sus extremos ***a*** y ***b*** y por tanto es la perpendicular en su punto medio.

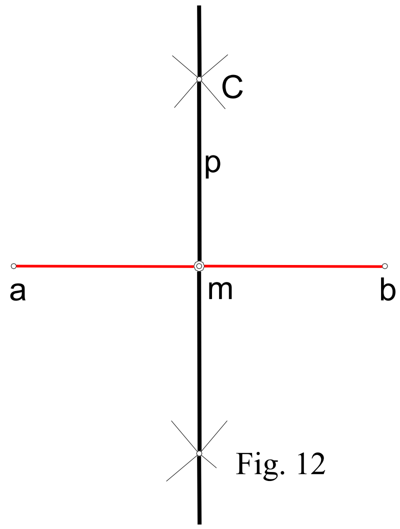


Fig. 12

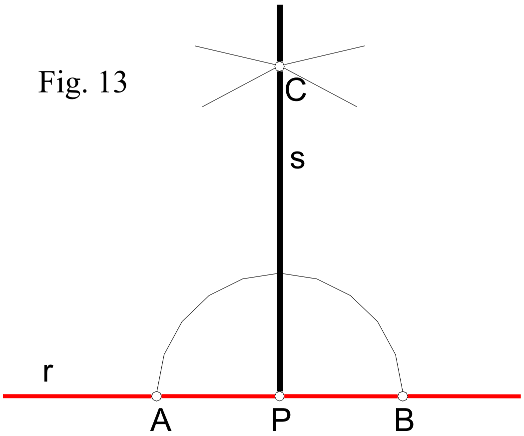
Sea el segmento ***A-B.***

Con centro en ***A*** y con radio mayor que la mita del segmento (***2/3*** aproximadamente), se trazan dos arcos de circunferencia.

Con el mismo radio y haciendo centro en ***B*** se traza otros dos arcos que cortarán a los anteriores en los puntos ***C*** y ***D***.

La unión de los puntos anteriores nos determinan la recta ***p***, mediatriz del segmento ***AB***. Esta será el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los extremos del segmento ***a*** y ***b***.

Fig. 13



7.3. Trazado de la perpendicular a una recta en un punto de ella. Fig.13.

Sea la recta ***r*** y un punto de la misma ***P***.

Con centro en ***P*** y radio arbitrario se traza una semicircunferencia que nos determinan los puntos ***A*** y ***B***.

El caso queda reducido al primero de los explicados.

7.4. Trazado de la perpendicular a una recta desde un punto exterior. Fig.14.

Sea la recta ***s*** y un punto exterior a ella ***Q***.

Con centro en ***Q*** y radio mayor que la distancia de ***Q*** a ***r,*** se traza un arco que cortará a la recta en los puntos ***A*** y ***B***.

El problema queda reducido al caso primero.

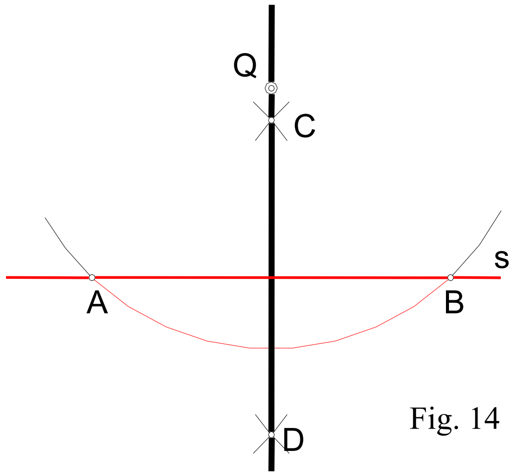
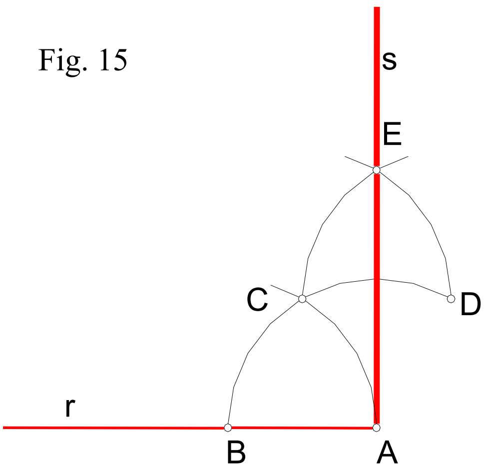


Fig. 14

7.5. Trazado de la perpendicular a una recta en su extremo. Fig.15

Fig. 15



Primer procedimiento: Sea la semirrecta ***r*** y su extremo ***A***

Con centro en el extremo ***A*** y con radio arbitrario trazamos un arco que corte a la recta ***r*** en el punto ***B***.

Manteniendo el mismo radio y con centro en ***B***, ***C*** y ***D***, trazamos tres arcos que nos determinan el punto ***E***.

La unión de ***E*** con ***A***, será la perpendicular ***s*** buscada.

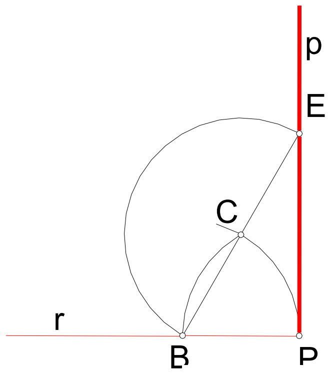


Fig.16

Segundo Procedimiento: Sea la semirrecta ***r*** y su extremo ***P***. Fig.16.

Se determina ***C*** como en el caso anterior

Se une ***B*** con ***C***, y se prolonga.

Con centro en ***C,*** trazo un arco con de radio de ***BC***, obteniendo el punto ***E.***

La unión de ***PE***, determina la solución ***p***.

Tercer Procedimiento: Sea la semirrecta ***r*** y su extremo ***A. Fig.17***

Elegimos un punto cualquiera ***C***, exterior a ***r*** y haciendo centro en el, trazamos un arco que pase por ***P.*** y corte a ***r*** en ***B.***

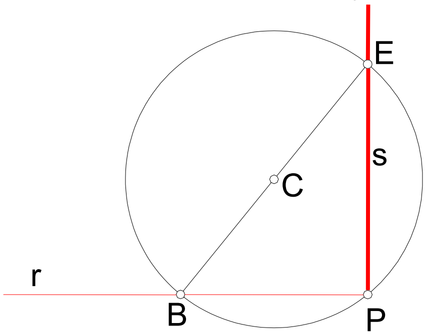


Fig.17

Unimos ***B*** con ***C***, y prolongamos la semirrecta hasta que
corte a la circunferencia en ***E***.

La unión de ***E*** con ***P***, será la perpendicular ***s*** buscada.

En definitiva lo que hemos realizado ha sido un triángulo
rectángulo con uno de sus catetos en la semirrecta ***r***.

7.6. División de un arco de circunferencia en dos partes iguales. Fig.18.

Es una aplicación del ejercicio, mediatriz de un segmento.

Sea el arco ***AB***.

Se une ***A*** con ***B*** y seguidamente trazamos la mediatriz de dicho segmento.

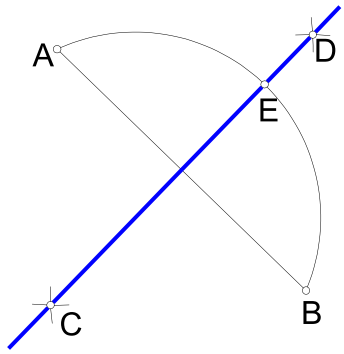


Fig.18

7.7. Dados tres puntos que no estén en línea recta, hallar la circunferencia que pase por ellos. Fig.19.

Sean los puntos ***A***, ***B***, ***C***.

Unimos ***A*** con ***B*** y ***B*** con ***C***.

Hallamos la mediatriz de a ambos de ambos segmentos.

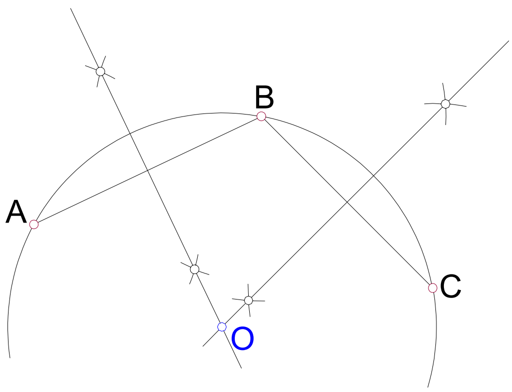


Fig.19

8) Paralelismo

Se llaman rectas paralelas a aquellas que situadas en un mismo plano, no se encuentran por más que se prolonguen en ambas direcciones.

8.1. Teorema

Si dos rectas son perpendiculares a una tercera, estas son paralelas entre si, de los contrario se cortarían en un punto desde el cual podría trazarse dos perpendiculares a una misma recta.

8.2. Distancia entre dos rectas paralelas.

Es el segmento de perpendicular a ambas comprendido entre ellas, que por lo dicho segmento será siempre igual cualquiera que sea el punto por donde se trace.

8.3. Trazado de una paralela a una recta que pase por un punto exterior.

8.3.1. Primer procedimiento. Fig. 20.

Sea la recta ***t*** y el punto exterior a ella ***P***.

Elegimos un punto cualquiera en la recta ***r***, por ejemplo el punto ***A.***

Trazamos una semicircunferencia que pase por el punto dado ***P***,

Determinando en la recta ***r***, los puntos ***B*** y ***C***.

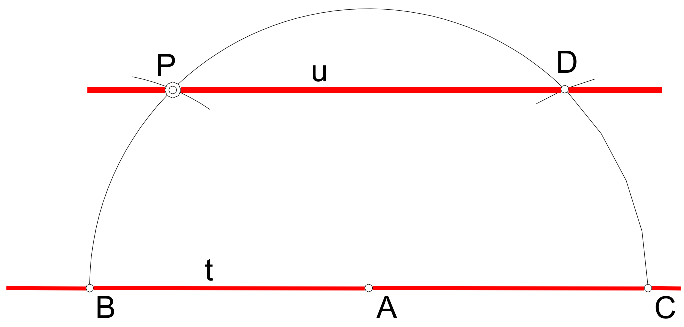


Fig.20

Trasladamos la cuerda ***BP***, para ello con centro en ***B*** y radio ***BP***, se traza un arco, que corta a la semicircunferencia en el punto ***D***.

La unión de ***D*** con ***P***, será la recta buscada.

8.3.2. Segundo procedimiento. Fig.21.

Segundo Procedimiento:

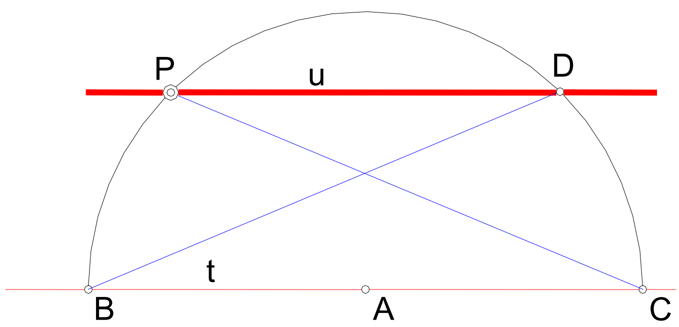


Fig.21

Haciendo centro en un punto cualquiera de la recta ***r***, por ejemplo en ***A***, trazamos un arco de circunferencia que pase por ***P***, determinando los punto ***B*** y ***C.***

Por medio del compás, tomamos la distancia de ***CP***, y la llevamos a partir de ***B***, obteniendo el punto ***D.***

La unión de ***D*** con ***P***, será la recta buscada.

8.3.3. Tercer procedimiento. Fig. 22.

Basta con considerar que dos rectas que se encuentran en un mismo plano que son perpendiculares a una tercera, son paralelas entre si.

Elegimos un punto cualquiera en la recta ***t***, el ***A***, y trazamos una recta perpendicular.

Seguidamente trazamos una recta ***u*** perpendicular a ***s*** que pase por un punto exterior ***P***., visto anteriormente.

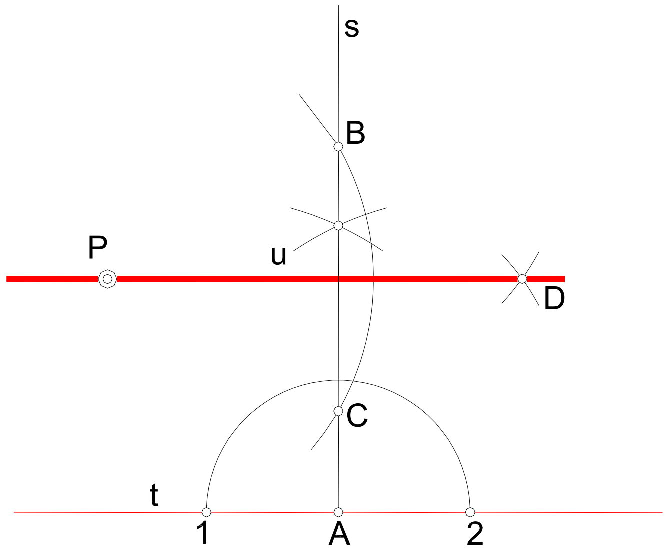


Fig.22

9) Paralelismo y perpendicularidad por medio de plantillas.

9.1. Rectas paralelas.

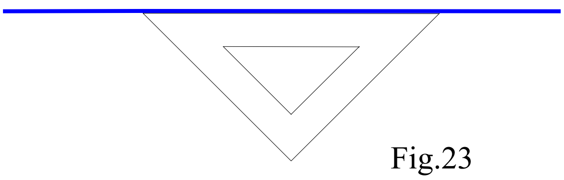


Fig.23

Para el trazado de paralelas con plantillas debemos seguir los pasos siguientes:

Primera posición: Se hace coincidir la hipotenusa de la escuadra con una horizontal. Fig.23.

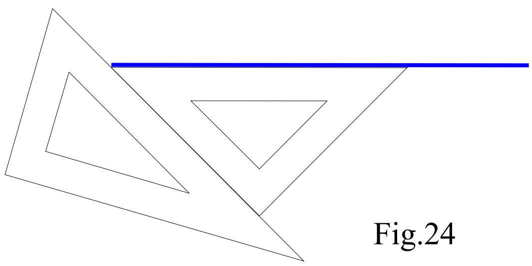


Fig.24

Segunda posición: Manteniendo inmóvil la escuadra con la mano izquierda, (para diestros), situar la hipotenusa del cartabón pegada a uno de los lados de la escuadra. Fig.24.

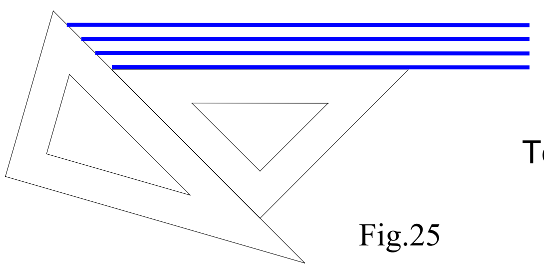


Fig.25

Tercera posición: Sin mover ahora el cartabón, deslizamos la escuadra para el trazado de horizontales. Fig.25

9.2. Rectas perpendiculares. Fig.26.

Partiendo de la posición tercera, giramos la escuadra 90º.
Y la deslizamos apoyada en la hipotenusa del cartabón.

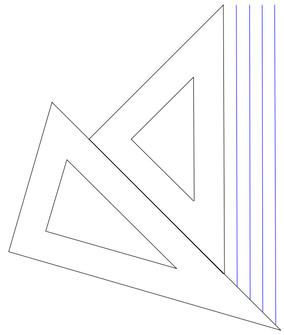


Fig.26

10) Ángulos

10.1. Definiciones

Denominamos ángulo plano convexo a la porción de espacio comprendida entre dos semirrectas a y b que se cortan en un punto V que es el vértice del mismo.

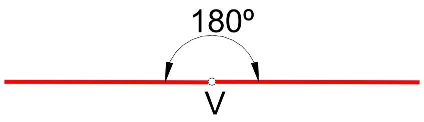


Fig.27

Se llama ángulo llano, al definido por dos semirrectas opuestas. Fig.27.

Se llama ángulo adyacente, al contiguo, cuyos lados no comunes son semirrectas opuestas. Su suma es un ángulo llano. Este ángulo también se llama suplementario. Fig.28.

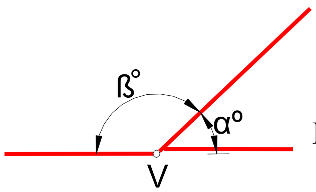


Fig.28

Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

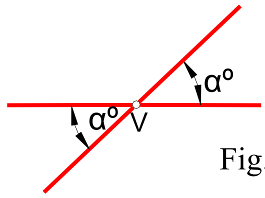


Fig.29

Se llaman ángulos complementarios, a aquellos que su suma vale un recto. Fig.30.

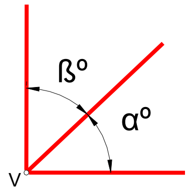


Fig.30

10.2. Trazado de un ángulo igual a otro. Fig. 31.

La construcción de un ángulo igual a otro, se fundamenta en que ángulos iguales le corresponden arcos y cuerdas iguales.

Sea el ángulo ***A***.

Sobre la recta ***s***, tomamos un punto cualquiera ***V***.

Con centro en ***V*** trazamos un arco con radio arbitrario.

Manteniendo el mismo radio, trazamos otro igual por ***V'.***

Con la cuerda ***CD***, trazamos el arco ***EF***.

Uniendo ***V'*** con ***F***, tendremos el mismo ángulo.

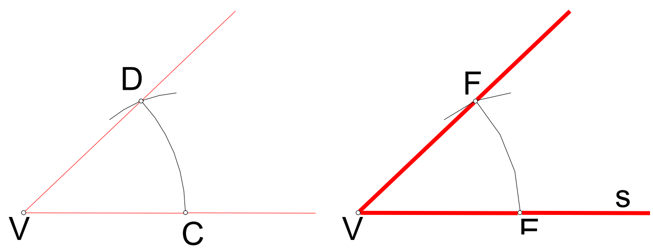


Fig.31

10.3. Suma de ángulos. Fig.32

Para sumar dos ángulos bastará con repetir la operación anterior tantas veces como ángulos queramos sumar, siempre en el mismo sentido.

Sean los ángulos ***A*** y ***F***.

Con centro en ***A***, ***F*** y ***G***, se trazan tres arcos iguales con radio arbitrario.

Por medio del compás llevamos la cuerda ***BC***, a partir de ***H***, obteniendo el punto ***I.***

Realizamos la misma operación con la ***DE***, que llevamos a partir de ***I***, obteniendo el punto ***J***, que unido con ***G***. tendremos la solución.

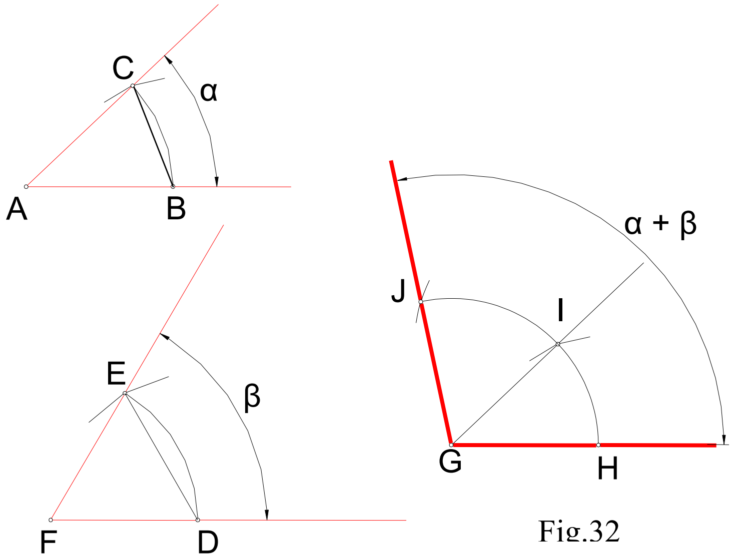


Fig.32

10.4. Diferencia de ángulos. Fig.33.

El ejercicio es similar al anterior, con la diferencia que las cuerdas se llevarán en sentido contrario a partir de un punto común.

Sean los ángulos ***A*** y ***B*** y la semirrecta **s**.

Trazamos con un radio arbitrario tres arcos de circunferencia iguales con centro en ***A***, ***B***, y ***V***.

Por medio del compás llevamos la cuerda mayor ***CD***, sobre ***G***, obteniendo el punto ***H***.

Restamos del arco anterior la cuerda ***EF***, obteniendo el punto ***I***. Uniendo ***I*** con ***V*** nos da la solución.

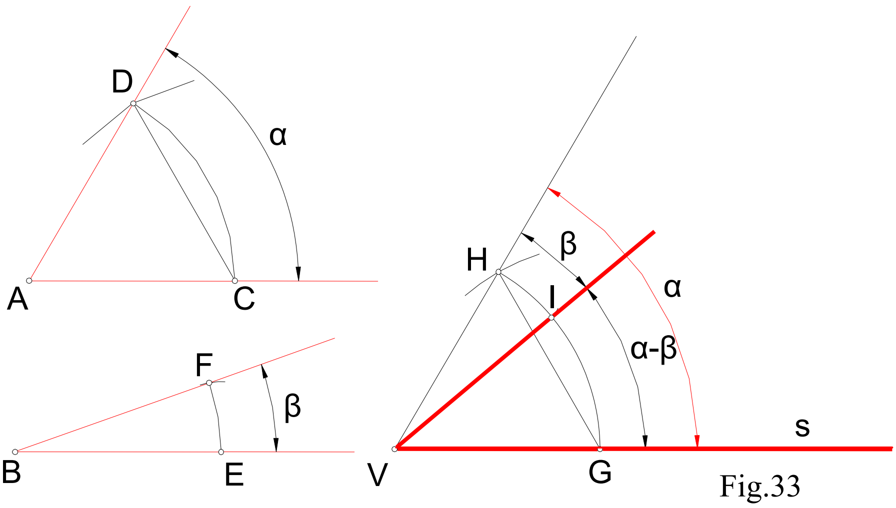


Fig.33

10.5. Bisectriz de un ángulo.

Se llama bisectriz de un ángulo a la línea que los divide en dos partes iguales.

Sea el ángulo ***A***.

Con centro en ***A*** trazamos un arco de radio arbitrario ***BC***. Conviene que el radio no sea muy pequeño. Fig.34.

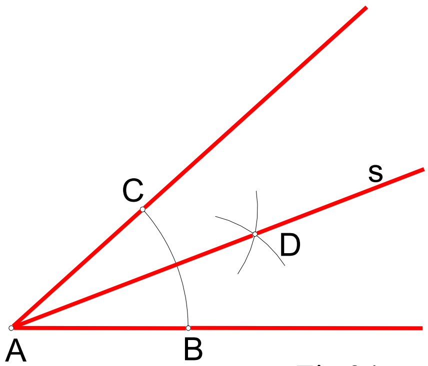


Fig.34

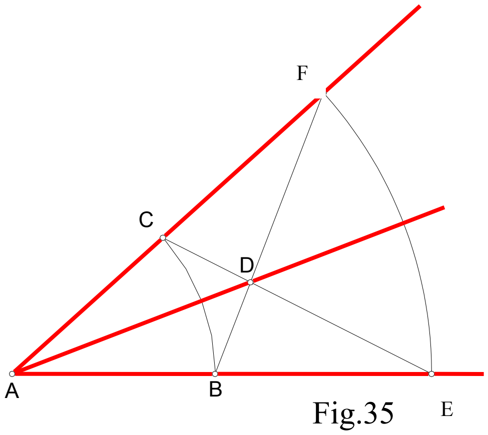


Fig.35

Hallamos la mediatriz de la cuerda ***BC***, obteniendo el punto ***D***.

La recta ***s***, será la bisectriz del ángulo

Podemos utilizar un segundo procedimiento (Fig.35) que se describe a continuación.

Haciendo centro en el vértice ***A***, trazamos dos arcos de radio arbitrario. Unimos los puntos ***B – F*** y ***E –C***. La bisectriz será la recta ***AD***.

10.6. Bisectriz de un ángulo de vértice desconocido. Fig.36.

Sea el ángulo formado por las rectas ***r*** y ***s***.

Trazamos una recta ***p***, arbitraria, que determina con las rectas anteriores los ángulos ***1***, ***2***, ***3***, ***4***.

Por el procedimiento anterior, hallamos las bisectrices de dichos ángulos, que se cortan en los puntos ***A*** y ***B***, puntos de la bisectriz buscada.

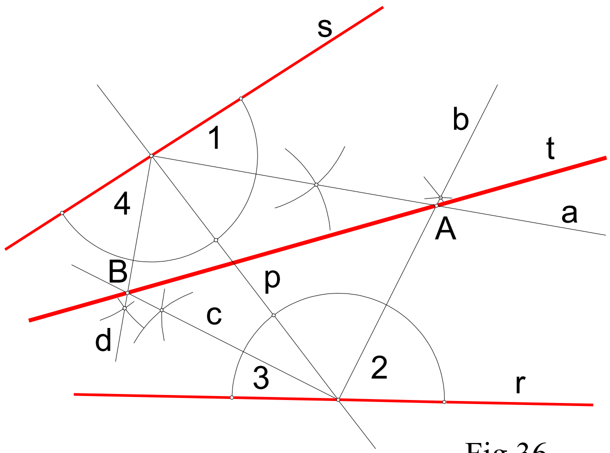


Fig.36

10.7. Trazados de ángulos por medio del compás.

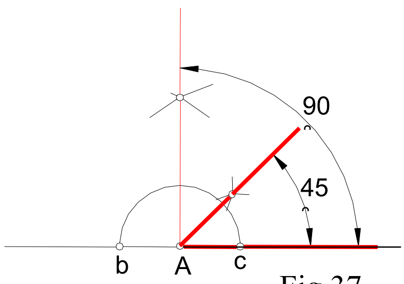


Fig.37

Ángulos de 90º y 45º. Fig.37.

Bastará con trazar un perpendicular en el punto ***A***, seguidamente hallar su bisectriz.

Ángulos de 60º y 30º. Fig.38.

Elegimos un punto cualquiera ***A***, con un radio arbitrario trazamos un arco, obteniendo el punto ***B***.

Haciendo centro en ***B*** y con el mismo radio, trazamos otro arco, obteniendo el punto ***C***.

La unión de ***C*** con ***B*** nos determinará el ángulo de ***60º***.

Con la bisectriz del mismo obtendremos el de ***30º***.

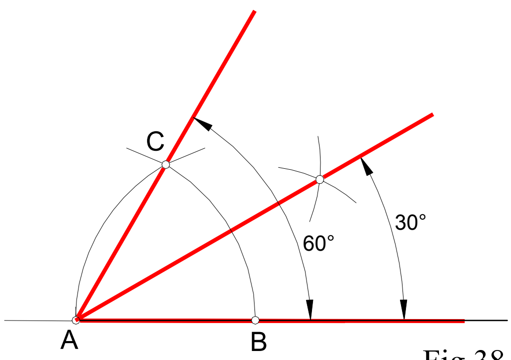


Fig.38

Ángulos* de *30º*, *150º* y *120º. Fig.39.

Construimos el ángulo de ***60º***, visto anteriormente.

Hallamos su bisectriz, con lo que tenemos el ángulo de ***30º.***

El suplementario de ***30º*** será el ángulo de ***150º***.

El suplementario de ***60º*** será el de ***120º***.

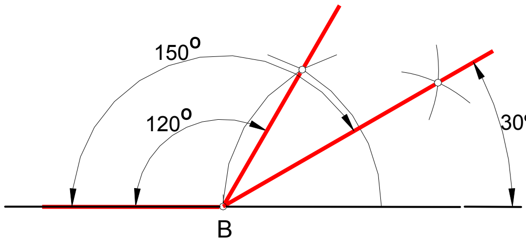


Fig.39

10.8. Trazado de ángulos con la escuadra y el cartabón. Fig. 40,41,42.

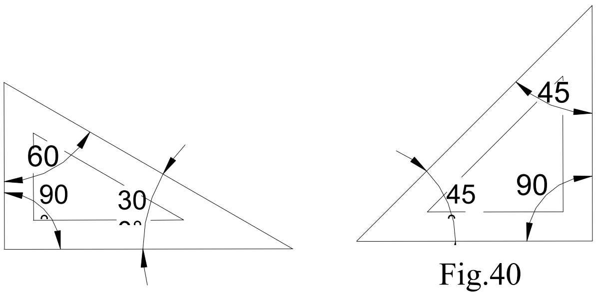


Fig.40

Teniendo presente los ángulos que forman los lados de la escuadra y el cartabón podemos combinar estos para obtener ángulos múltiplos y submúltiplos de ellos.

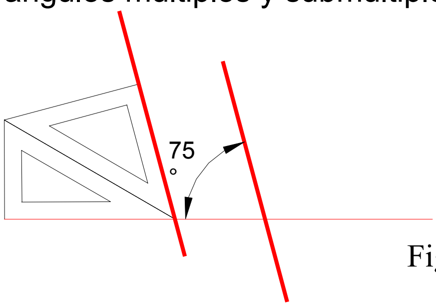


Fig.41

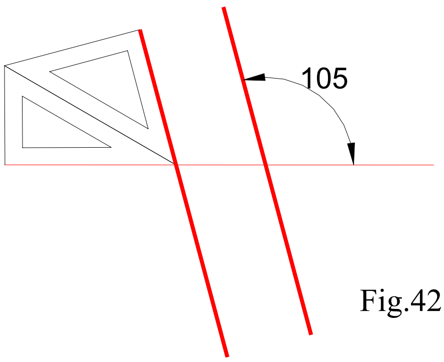


Fig.42

10.9. Ángulos en la circunferencia.

Ángulo central β*. Fig.43.* Es aquel que tiene el vértice en el centro de la circunferencia ***O***, y por lados los radios de la misma.

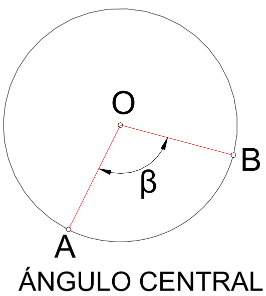


Fig. 43

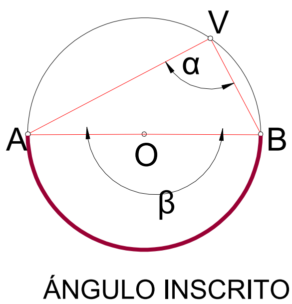


Fig.44

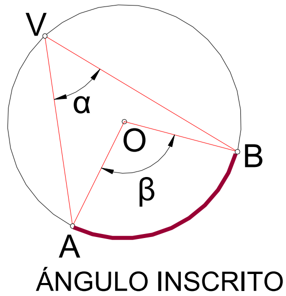


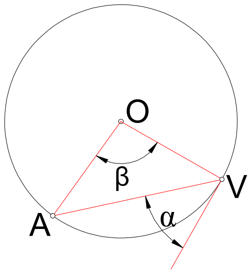
Fig.45

Ángulo inscrito α. *Fig.44- 45*.

Tiene el vértice ***V*** en la circunferencia y sus lados son rectas secantes a ella. Su valor es la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.(**α = β/2**).

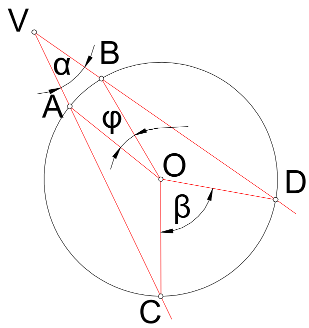
Ángulo seminscrito α. *Fig.46.*
Tiene el vértice ***V*** en el centro de la circunferencia y los lados son cuerda y tangente. Su valor es la mitad del ángulo central. (**α=β/2**)

Ángulo exterior. Fig.47. Tiene por vértice un punto exterior a la circunferencia y los lados son tangentes o secantes a la misma. Su valor será: (**α = (β – φ)/2**)



ÁNGULO SEMINSCRITO

Fig.46



ÁNGULO EXTERIOR

Fig.47

Ángulo exterior α. Tiene por vértice ***V*** un punto exterior a la circunferencia y los lados son tangentes o secantes a la misma. Su valor será: (**α = (β – φ)/2**)

11)Arco Capaz
Se denomina arco capaz de un segmento dado con respecto a un ángulo, al lugar geométrico de los puntos de una circunferencia desde los cuales se ve dicho segmento bajo el mismo ángulo. Fig. 48.

Construcción:

Sea el ángulo ***α = 42º*** y el segmento ***AB***.

Sobre una recta cualquiera, llevamos el segmento ***AB***.

Construimos en el extremo ***A*** el ángulo ***90- 42º = 48***.

Trazamos la mediatriz del segmento ***AB***.

El punto ***O*** donde la recta ***m*** corta a la mediatriz ***p***, será el centro del arco capaz.

Como puede observarse los ángulos ***C***, ***D***, ***E*** son iguales entre si y tienen por valor el ***α*** dado.

También puede resolverse trazando en el extremo ***A*** un ángulo de ***42º***, hacia abajo. La perpendicular a uno de sus lados nos determina el centro ***O***.

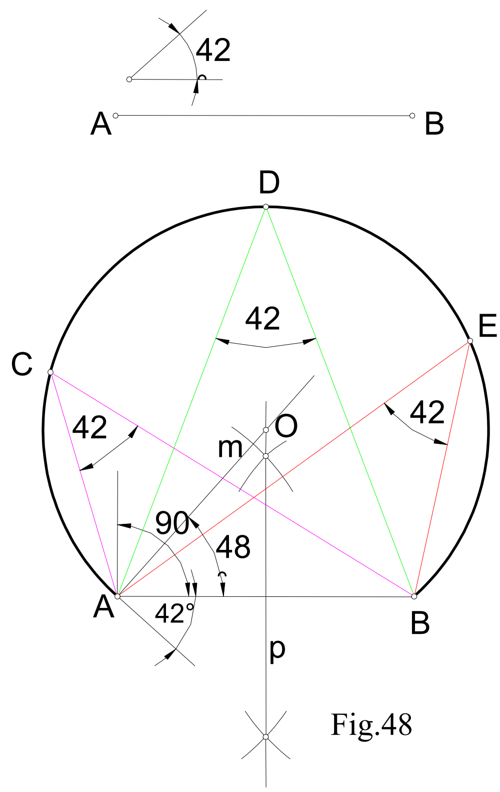


Fig.48

TERCERA UNIDAD. Construcción de formas poligonales

Contenido:
Definiciones y clasificación
Triángulos
Cuadriláteros
Polígonos regulares e irregulares
División de la circunferencia

12) Definiciones y clasificación.

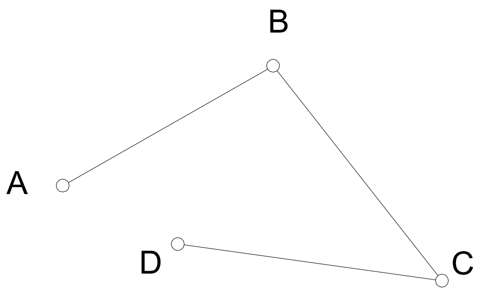


Fig.49

Línea poligonal ***A, B, C, D***, es aquella formada por segmentos rectilíneos. Fig.49.

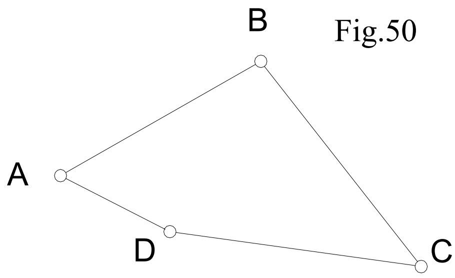


Fig.50

Si los extremos de dicha línea se cierran, tendremos un polígono. Fig.50.

Lados son los segmentos que forman el polígono. Fig.51.

Vértices, son los puntos donde concurren dos lados.

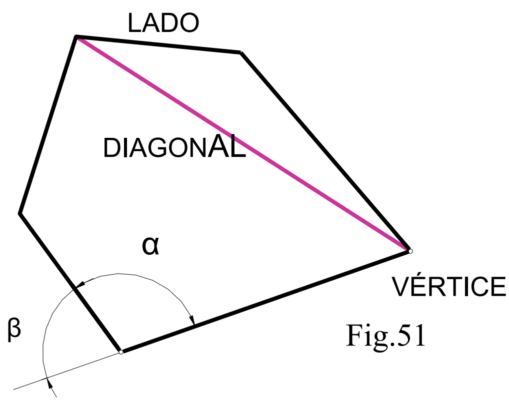


Fig.51

Diagonal son segmentos que unen dos vértices no consecutivos Se llama **Perímetro** a la suma de todos sus lados.

Ángulos interiores son los que forman dos lados consecutivos.

Ángulos exteriores son los complementarios de los anteriores

Polígonos convexo, es aquel que alargando un lado todos los vértices quedan a un lado de dicha recta. Fig.52.

Polígono cóncavo, es aquel que alargando alguno de sus lados los vértices quedan a ambos lados de la recta. Como puede

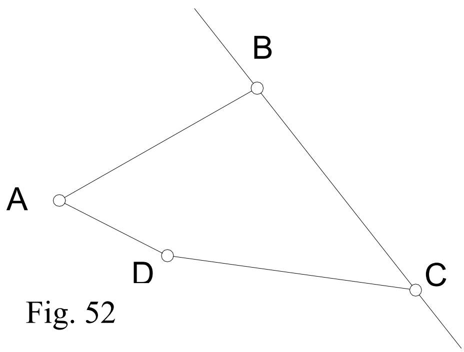


Fig. 52

apreciarse el ángulo interior ***C*** es mayor que un llano. Fig.53.

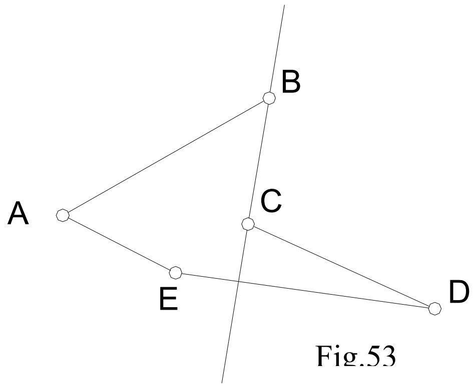


Fig.53

Los polígonos pueden ser regulares e irregulares.

De acuerdo con el número de lados los polígonos regulares se clasifican de la forma siguiente:

Nombre	Lados	Nombre	Lados
Triángulo	3	Eneágono	9
Cuadrado	4	Decágono	10
Pentágono	5	Undecágono Endecágono	11
Hexágono	6	Dodecágono	12
Heptágono	7	Pentadecágono	15
Octógono	8	Icoságono	20

Se llama ***polígono equilátero***, aquel que tiene todos sus lados iguales. Fig. 54.

Polígono equiángulo, es el que tiene todos sus ángulos iguales

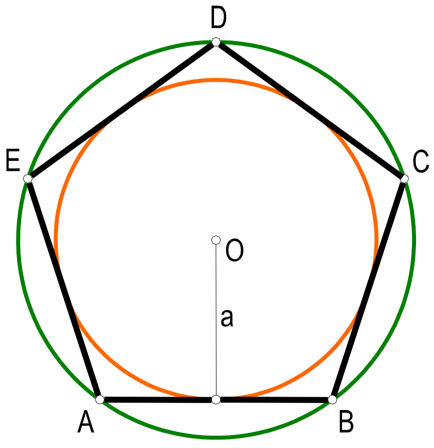


Fig. 54

Polígono regular, es el que cumple las dos condiciones

Teorema: Todo polígono regular es incriptible en una circunferencia y circunscriptible a otra que tiene el mismo centro.

Radio r del polígono regular, es el de la circunferencia circunscrita.

Apotema "a" de un polígono regular es el radio de la circunferencia Inscrita.

Ángulo central α, del polígono regular, es el formado por los radios que pasan por dos vértices consecutivos del polígono.

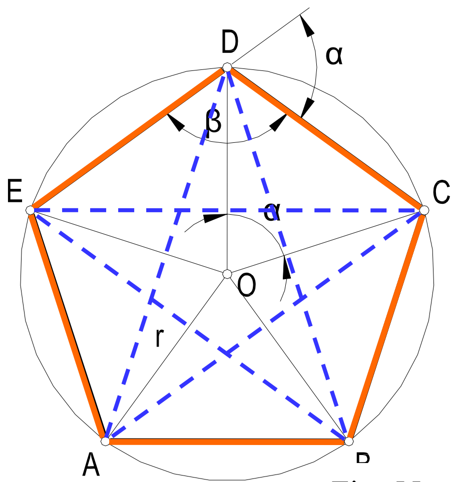


Fig. 55

Teoremas: Los ángulos centrales de un polígono regular, son suplementarios de los interiores del mismo, e iguales a los exteriores. **α + β = 180º.**

Polígonos regular convexo, es aquel que se cierra después de recorrer una sola vez la circunferencia, pasando consecutivamente por todos sus vértices. Fig. 55.

Polígono regular estrellado, se cierra después de recorrer varias veces la circunferencia.

13)Triángulos.

Se llama triángulo a la porción de espacio del plano limitado por tres segmentos rectilíneos.

Lados de un triángulo son los segmentos que lo limitan.

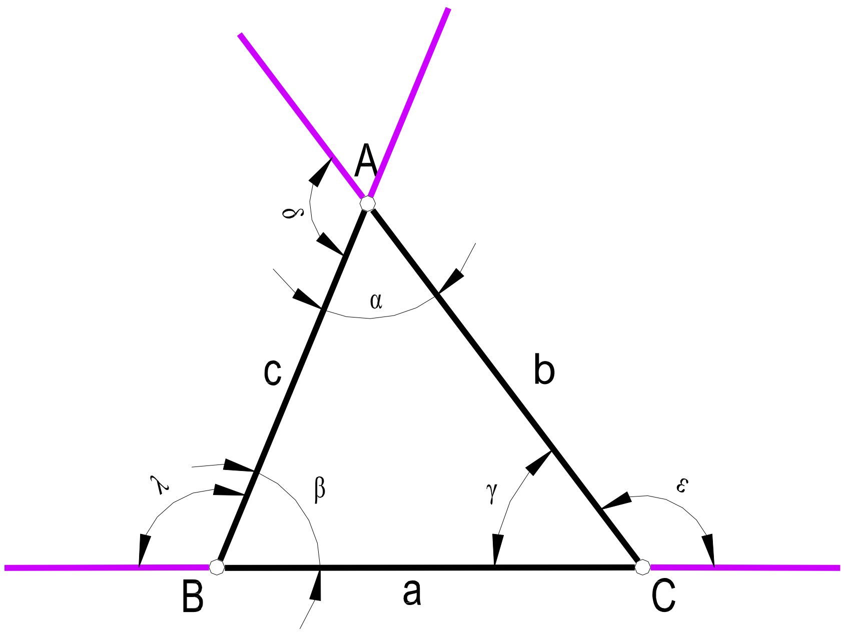
El punto donde se cortan dos lados consecutivos se denomina, vértice, y se designa por una letra mayúscula.

Los lados se designan por la misma letra que el vértice opuesto, pero en minúscula.

Ángulo interior del triángulo, es el formado por dos lados consecutivos.

Ángulos exteriores, son los adyacentes de los interiores.

La suma de los lados internos de un triángulo es igual a dos rectos es decir ***180º***.
$\alpha + \beta + \gamma = 180º$. Fig. 56.



El ángulo exterior de un triángulo, es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes **$\varepsilon = \alpha + \beta$.**

A mayor ángulo se opone siempre mayo lado.

La suma de los lados de un triángulo siempre es mayor que el tercero.

Un lado de un triángulo es siempre mayor que la diferencia de los otros dos.

Fig. 56

13.1. Nomenclatura y Clasificación de triángulos.

Para los vértices emplearemos letras mayúsculas, comenzando por el vértice superior y en sentido contrario a las agujas del reloj.

Los lados de un triángulo los nombraremos por letras minúsculas, de tal forma que p.e. al vértice ***A***, le corresponda el lado ***a***.

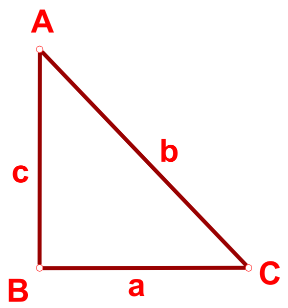
En ambos casos utilizaremos las primeras letras del abecedario.

Los triángulos atendiendo a sus ángulos los triángulos se clasifican en: rectángulos, acutángulos y obtusángulos.

Rectángulo: tiene un ángulo recto y dos agudos. Fig. 57.

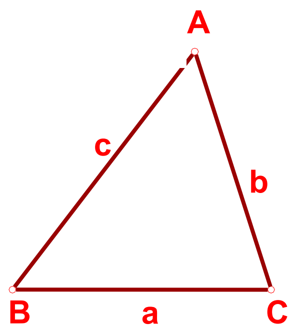
Acutángulo: tiene tres ángulos agudos. Fig. 58.

Obtusángulo: tiene los tres ángulos obtusos. Fig. 59



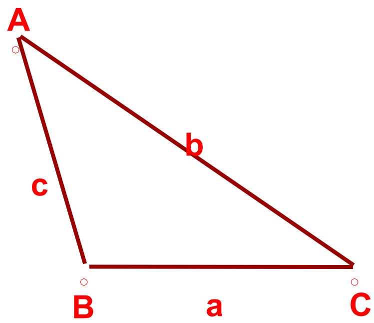
Rectángulo

Fig. 57



Acutángulo

Fig. 58



Obtusángulo

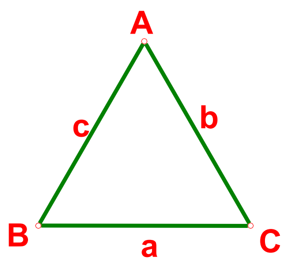
Fig. 59

Según la magnitud de su lados clasificamos los triángulos en:

Equilátero: Los tres lados iguales. Fig. 60

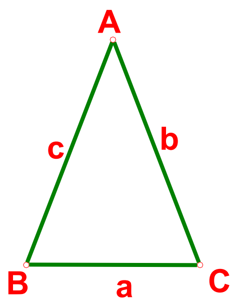
Isósceles: Dos lados iguales y uno desigual. Fig. 61

Escaleno: Todos sus lados desiguales. Fig. 62



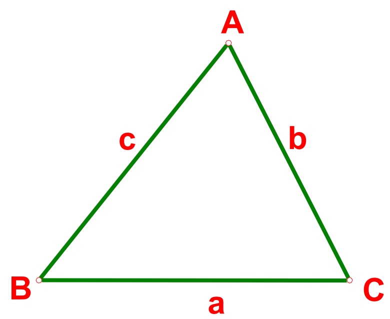
Equilátero

Fig. 60



Isósceles

Fig. 61



Escaleno

Fig. 62

13.2. Puntos notables de un triángulo.

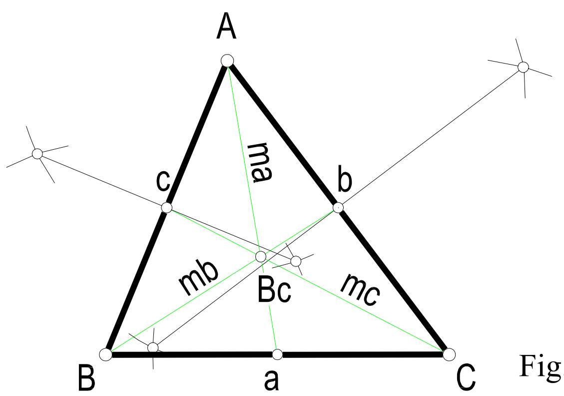


Fig. 63

*Se llama mediana **ma** de triángulo, a la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. El punto donde se cortan las medianas de un triángulo se llama baricentro **Bc**.. Fig. 63.*

Construcción : Hallamos la mediatriz de cada uno de los lados del triángulo.

Unimos cada vértice con el punto medio del lado opuesto hallado.

El punto de intersección de las medianas será el baricentro ***Bc. Fig. 63.***

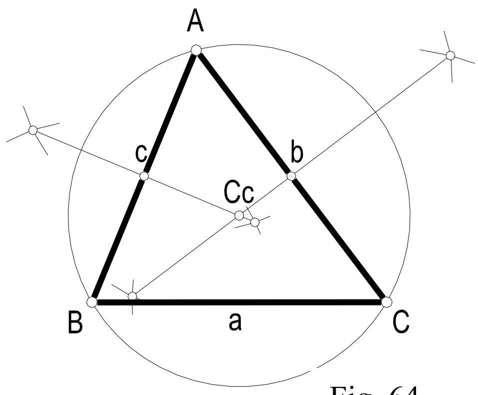


Fig. 64

*Se llama circuncentro **Cc** de un triángulo, al punto de intersección de sus mediatrices de sus lados. Fig. 64.*

El circuncentro equidista de sus vértices y es el centro de la circunferencia circunscrita.

Construcción: Hallamos las mediatrices de sus lados.

El punto de corte de las mediatrices ***Cc***, será el circuncentro del triángulo y centro de la circunferencia circunscrita.

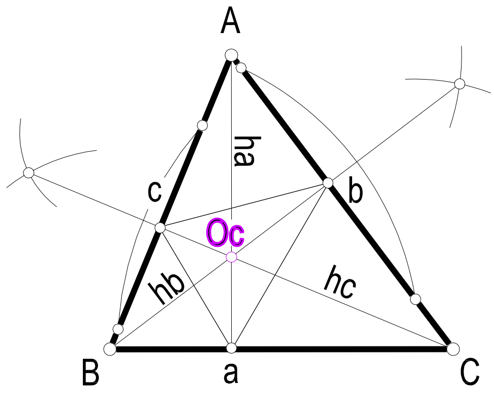


Fig. 65

*Se llama ortocentro **Oc** de un triángulo, al punto donde concurren las alturas del mismo. Fig. 65.*

Para su construcción: Bastará con trazar la perpendicular desde cada vértice al lado opuesto. El punto de corte será el ortocentro ***Oc.***

La unión de los pies de las alturas formarán un triángulo que se llama ***Triángulo Órtico***.

*Se llama incetro **Ic** de triángulo, al punto de intersección de las bisectrices de sus ángulos. Fig. 66.*

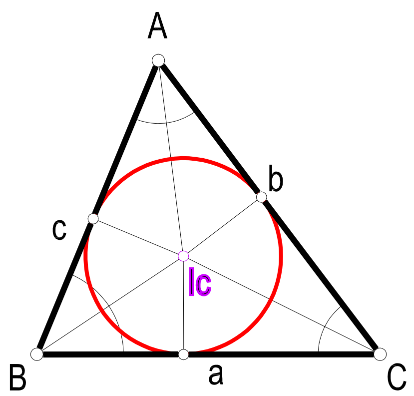


Fig. 66

Para su construcción, bastará con trazar las bisectrices de dos de sus ángulos.

El incentro equidista de sus tres lados y por ello es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

Existen puntos exteriores que tienen la misma propiedad y que se denominan exincentros.

La circunferencia que es tangente a un lado y a las prolongaciones de los otros, se llama exinscrita.

13.3. Recta de Euler

Leonardo Euler (1707-1783), demostró que el baricentro, ortocentro y circuncentro de un triángulo están en línea recta. A dicha recta se le llama ***Recta de Euler. Fig. 67.***

Además se verifica que el baricentro esta situado entre el ortocentro y circuncentro y a doble distancia del primero que del segundo.

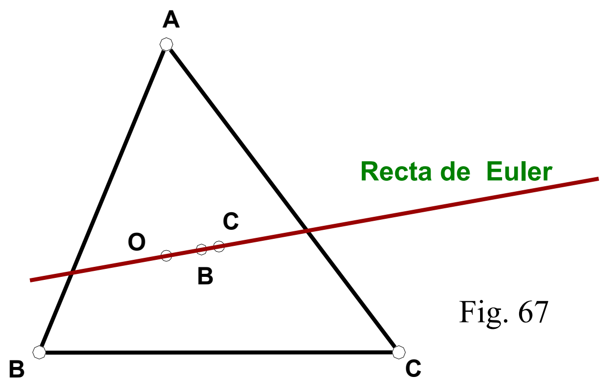


Fig. 67

13.4. Construcción de triángulos

Para la construcción de un triángulo serán necesarios conocer tres datos, o bien un dato y dos condiciones o dos datos y una condición. Las condiciones pueden ser lados, ángulos o cualquier otra.

13.4.1. Triángulos equiláteros.

a) Trazado de un triángulo equilátero dado un lado. Fig. 68.

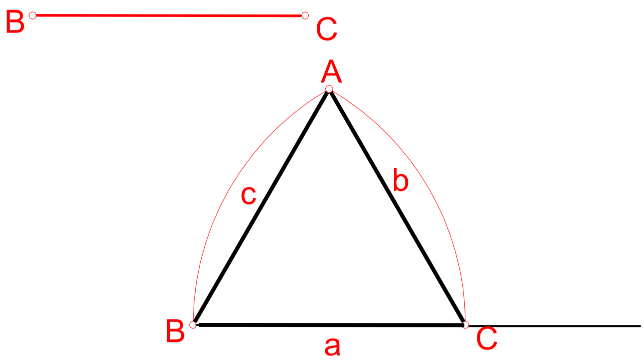


Fig. 68

Al ser los tres lados iguales, operaríamos de la forma siguiente:

Sobre una recta cualquiera, llevamos el lado ***BC***.

Con centro en ***B*** y ***C*** trazamos arcos de radio ***BC***, obteniendo el punto ***A***. vértice buscado.

b) Trazado de un triángulo equilátero conociendo el radio r de la circunferencia circunscrita. Fig. 69.

Trazamos una circunferencia de radio ***r*** y centro ***O***:

Con centro en ***m*** y radio ***r*** trazamos un arco que pase por ***O***. Dicho corta a la circunferencia en ***BC***.

Unimos ***A***, ***B***, y ***C***, obteniendo el triángulo buscado

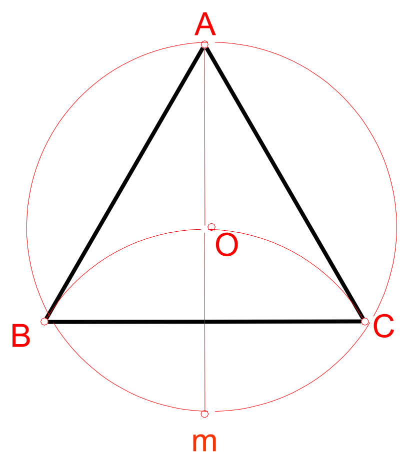


Fig. 69

13.4.2. Triángulos isósceles

a) Trazado de un triángulo isósceles conociendo dos tres lados. Fig. 70.

Sean los lados ***a*** y ***b***:

Sobre una recta cualquiera r, llevamos el valor de ***a***.

Haciendo centro en ***B*** y ***C*** y con el radio ***c***, lado que se repite, trazamos dos arcos de circunferencia obteniendo el vértice ***A***.

Uniendo ***A***, ***B*** y ***C*** tendremos el triángulo.

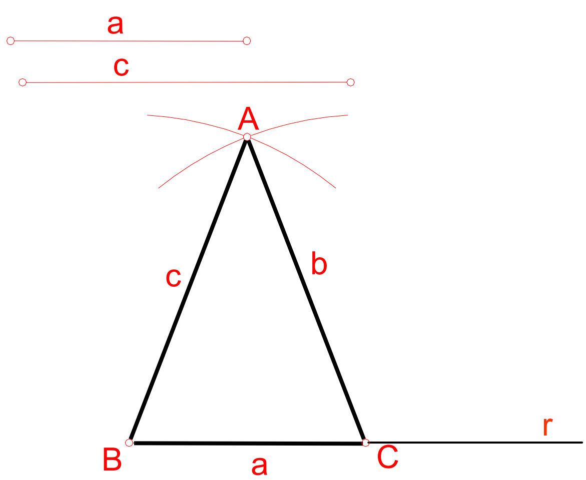


Fig. 70

b) Trazado de un triángulo isósceles dado el lado desigual y el ángulo opuesto. Fig. 71

*Construimos el ángulo desigual **A.***

*Hallamos la bisectriz de **A**.*

*Trazamos la mediatriz del segmento **BC**, obteniendo **a/2**.*

*Trazamos una perpendicular a la recta bisectriz en un punto cualquiera, y llevamos sobre ella **a/2**. Trazamos dos paralelas, y tenemos resuelto el problema.*

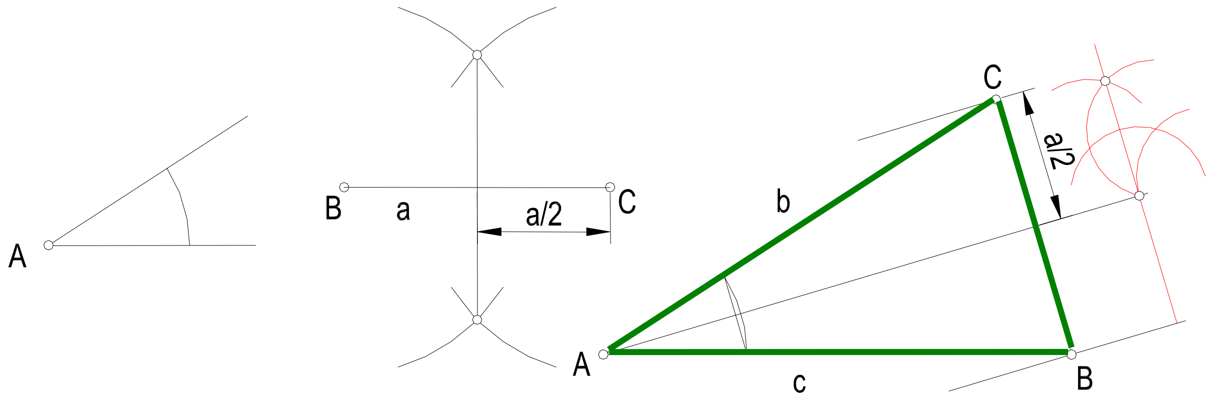


Fig. 71

c) Hallar el triángulo isósceles dado el ángulo desigual " A " y la suma del lado " a " y la altura (a + h). Fig. 72.

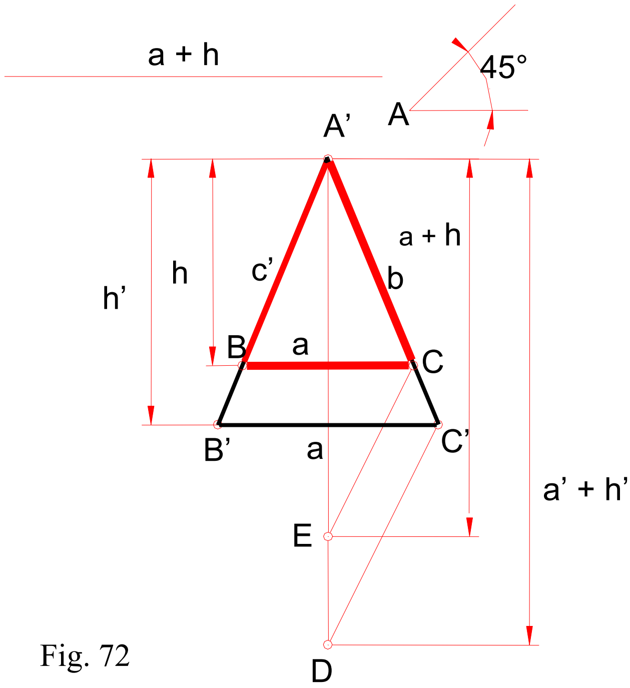


Fig. 72

Este ejercicio se resolverá por semejanza.

Como regla general todos los ejercicios que utilicemos para su construcción este método, partiremos de un triángulo cualquiera, ya que todos ellos serán semejantes.

Se construye un triángulo isósceles cualquiera ***A', B', C'*** con el ángulo desigual en "***A***".

Se prolonga la altura de dicho triángulo.

Se lleva sobre dicha recta la suma del lado ***a'*** y su altura correspondiente ***h'.***

Se une el punto ***D*** con el vértice ***C'.***

Sobre la prolongación de la altura se lleva ***a + h.***

Por el punto ***E*** se traza una recta paralela a ***DC',*** resultando el vértice ***C*** que completa el ejercicio

13.4.3. Triángulos escalenos

a) Trazado de un triángulo isósceles dado el lado igual y el ángulo desigual. Fig. 73.

Sea el ángulo ***A*** y el lado ***c***:

Sobre una recta ***r*** cualquiera llevamos el valor de ángulo ***A***.

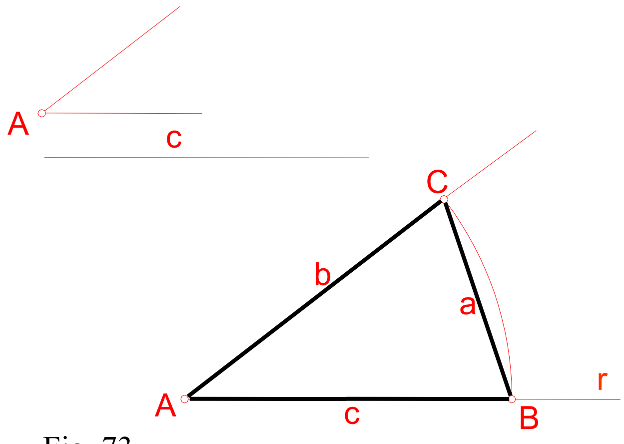


Fig. 73

Haciendo centro en ***A*** y con radio el valor del lado trazamos un arco de circunferencia que nos determinan los vértices ***B*** y ***C.***

Con la unión de ***A***, ***B*** y ***C***, tendremos la solución.

b) Trazado de un triángulo escaleno, conociendo sus tres lados. Fig. 74.

Sean los lados ***a***, ***b***, ***c***:

Sobre una recta ***r***, llevamos el valor del lado ***a***.

Tomando con el compás el valor del lado ***c***, se traza un arco haciendo centro en ***B***.

Se realiza la misma operación con el lado ***b***, haciendo centro en ***C***.

La intersección de ambos arcos de circunferencia determina el vértice ***A***, que uniendo con ***B*** y ***C*** nos da el triángulo buscado.

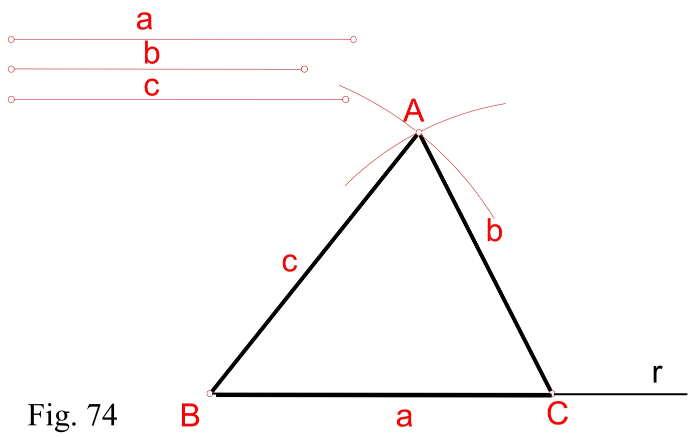


Fig. 74

c) Trazado de un triángulo escaleno dado dos lados y el ángulo que forman. Fig. 75.

Sean los lados **a** y **c** y el ángulo comprendido **B**:

Sobre una recta **r** cualquiera construimos el ángulo **B** dado.

Con centro en **B** y radio el valor de los lados, trazamos dos arcos, que determinan los vértices **A** y **B**.

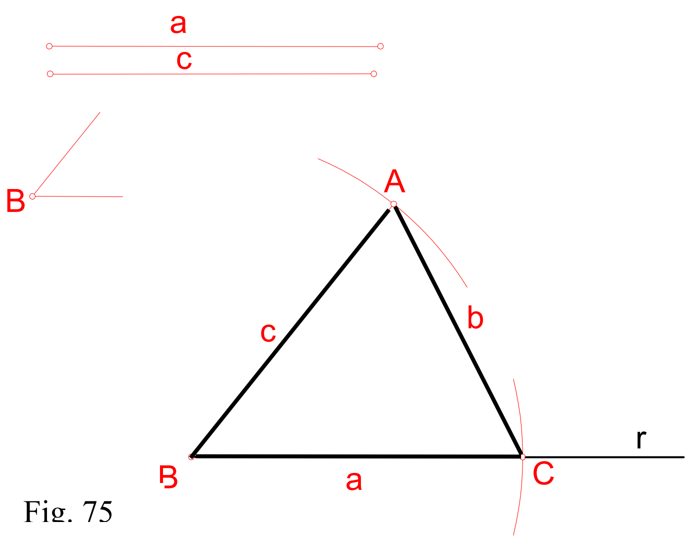


Fig. 75

La unión de **A**, **B**, y **C**, nos da la solución.

d) Triángulo escaleno conociendo dos lados a y c y el ángulo opuesto a uno de ellos B. Fig. 76.

Sea el ángulo ***A*** y los lados ***a*** y ***c***:

Sobre una recta ***r***, y en un punto de ella construimos el ángulo ***A***.

Llevamos a partir de ***A*** el lado ***c***.

Con centro en ***B*** y radio el lado ***a*** trazamos un arco que determina el vértice ***C*** y ***D***. El ejercicio tendrá dos soluciones.

Según la distancia ***d***, el ejercicio puede tener una solución, dos o cero.

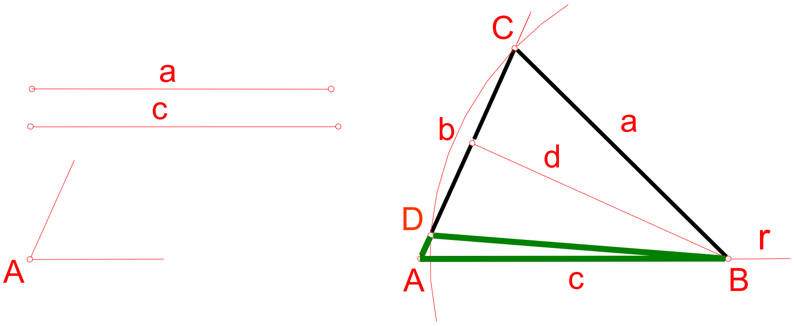


Fig. 76

e) Por medio del Arco capaz. Trazar un triángulo escaleno, conociendo su base, el ángulo opuesto y otro lado. Fig. 77.

La forma mas sencilla para la construcción de un triángulo cuando se conoce un lado y el vértice opuesto al mismo, es el empleo del arco capaz.

Sobre el lado ***a*** construimos el ángulo dado ***A***.

Por el extremo de ***B***, trazamos una perpendicular hasta que corte a la mediatriz del lado ***a***.

Con centro en ***O***, trazamos el arco capaz.

Haciendo centro en ***B*** y ***C*** trazamos dos arcos que cortan a la circunferencia, en los puntos ***A*** y ***A',*** soluciones buscadas.

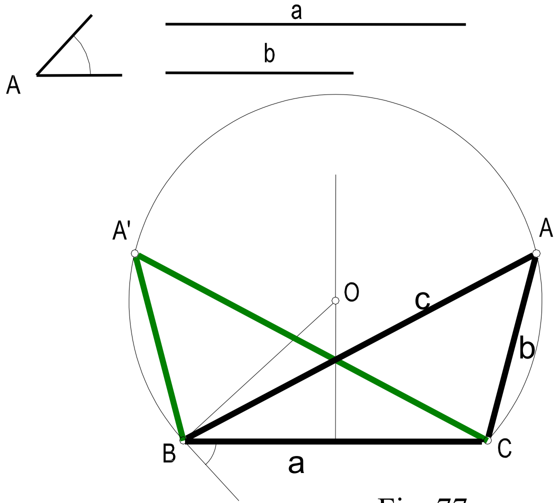


Fig. 77

Se une el punto ***D*** con el vértice ***C'.***

Sobre la prolongación de la altura se lleva ***a + h.***

Por el punto ***E*** se traza una recta paralela a ***DC',*** resultando el vértice ***C*** que completa el ejercicio

f) Construir un triángulo escaleno, conociendo un lado a, el ángulo opuesto y la altura ha, correspondiente a dicho lado. Fig. 78.

El ejercicio es similar al visto anteriormente. Una vez resuelto el arco capaz, trazaremos una paralela al lado ***a*** con el valor de ***ha***. Esta cortará a la circunferencia en los puntos ***A*** y ***A'***, que unidos con ***B*** y ***C***, obtendremos las soluciones

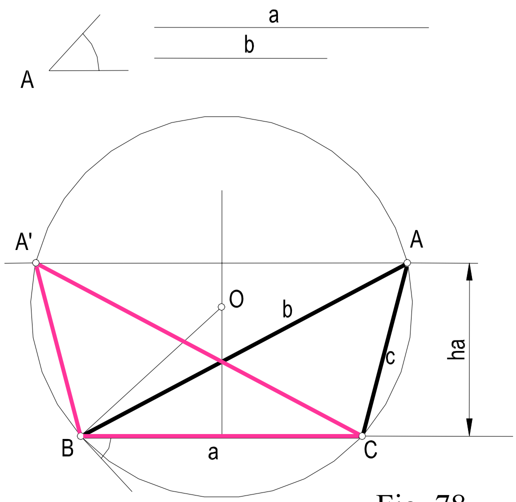


Fig. 78

13.4.4. Triángulos rectángulos

La nomenclatura de estos triángulos será similar a los vistos con anterioridad, con la única salvedad de comenzar la designación por el ángulo recto, al que llamaremos ***A***.

13.4.5.

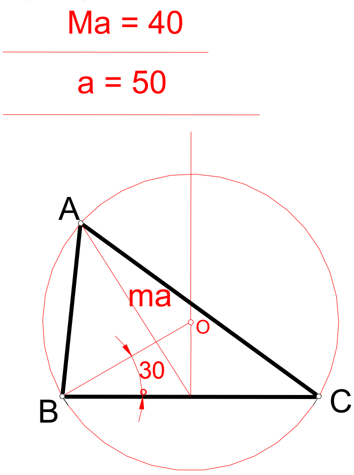


Fig. 79

a) Construcción de un triángulo escaleno, conociendo el lado a, el ángulo opuesto A = 60º y la mediana ma. Fig. 79.

Construimos el arco capaz llevando en el segmento **a** partir del extremo **B**, el ángulo de **30º,** diferencia entre **90-60**.

El siguiente paso será hacer centro en la mitad del lado ***a***, y con el valor de la mediana ***ma***, trazar un arco que cortará a la circunferencia en el vértice buscado ***A.***

b)Construir un triángulo rectángulo conociendo dos catetos b y c. Fig. 80.

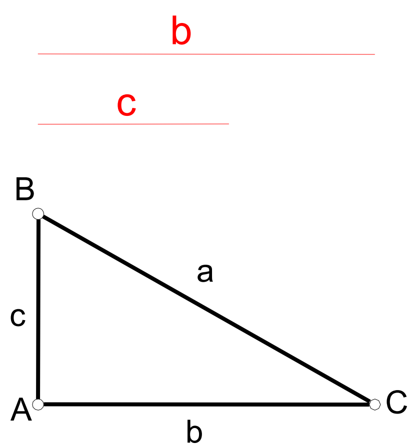


Fig. 80

Para su construcción se requieren tres datos, en este caso por ser un triángulo rectángulo, los dos catetos y el ángulo que forman de ***90º***.

Para su construcción levantamos en uno de los extremos del cateto ***b*** una perpendicular.

Sobre la perpendicular llevamos el cateto ***c***. La unión de ***B*** y ***C*** nos dará la solución.

c) Construcción de un triángulo rectángulo, conociendo un cateto y el ángulo agudo. Fig. 81.

Sobre una recta cualquiera **r,** llevamos el cateto ***b*** en uno de sus extremos, p.e. ***C*** construimos el ángulo dado.

Por el extremo **A**, levantamos una perpendicular que determina el vértice ***B.***

d) Construcción de un triángulo rectángulo, conociendo un cateto y la hipotenusa. Fig. 82.

Hallamos la mediatriz m de la hipotenusa.

Haciendo centro ***m***, trazamos una semicircunferencia.

Con el compás tomamos el valor de lado ***c***, y haciendo centro en ***B***, trazamos un arco que determina el vértice ***A***.

La unión de ***A***, ***B***, ***C*** nos dará el triángulo buscado.

Obsérvese que la construcción está basa en el *Arco Capaz .*

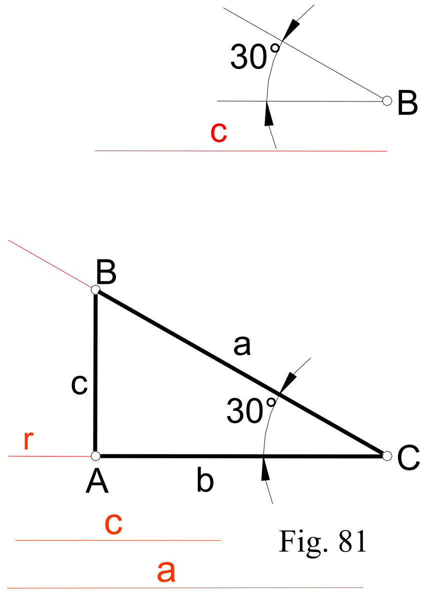


Fig. 81

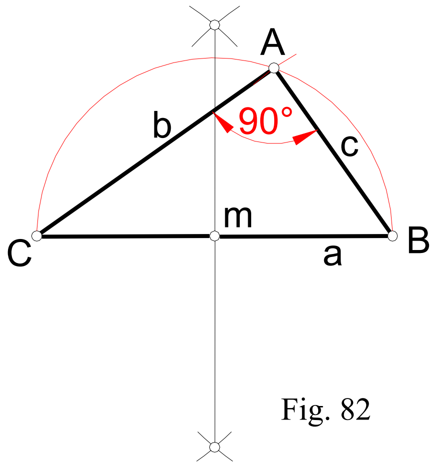


Fig. 82

14)Cuadriláteros

Los cuadriláteros son figuras planas formadas por cuatro rectas que se cortan dos a dos.

Nomenclatura: Los vértices del cuadrilátero se nombrarán por letras mayúsculas, comenzando por las primeras del abecedario en sentido contrario a las agujas del reloj.

Los lados se nombrarán por letras minúsculas siguiendo el mismo criterio.

Estos se clasifican en: Paralelogramo. Trapecio y Trapezoide. Fig. 83.

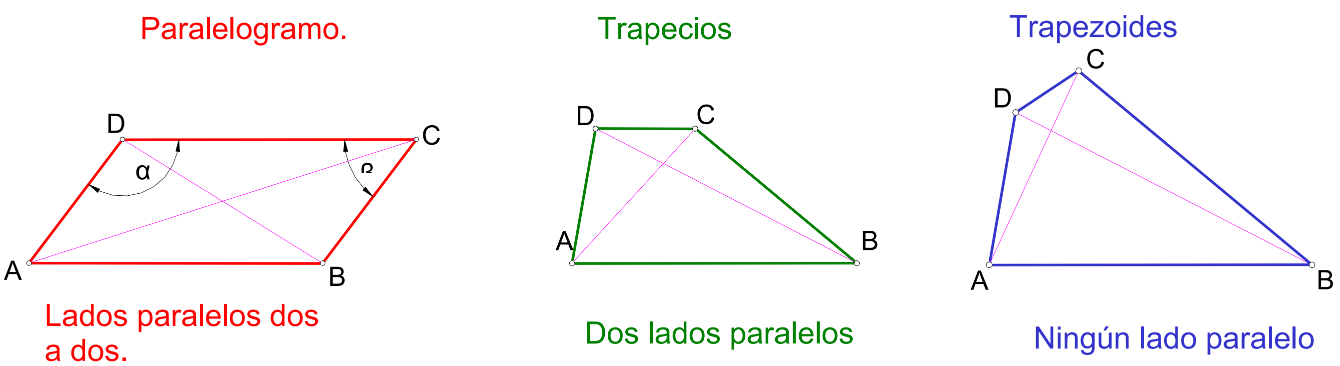


Fig. 83

PARALELOGRAMO: Es aquel que tiene sus lados paralelos dos a dos.

Clasificación: Cuadrado, rectángulo, rombo y romboide. Fig. 84.

Cuadrado: Tiene cuatro lados iguales. Ángulos iguales y rectos. Diagonales iguales

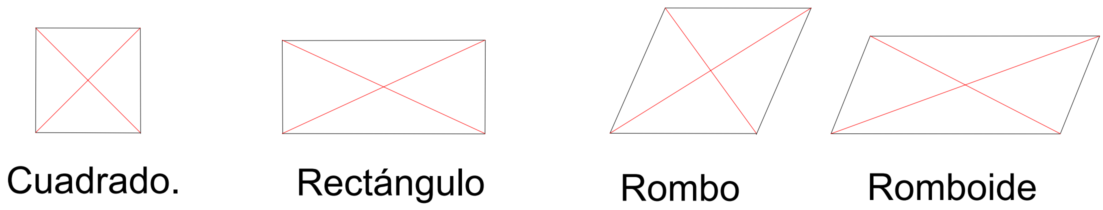


Fig. 84

perpendiculares y que se cortan en su punto medio.

Rectángulo. Cuatro lados paralelos e iguales dos a dos. Ángulos iguales rectos. Diagonales iguales no perpendiculares y que se cortan en su punto medio

Rombo: Cuatro lados iguales paralelos dos a dos. Ángulos opuestos iguales y no rectos. Diagonales distintas perpendiculares y que se cortan en su punto medio.

Romboide: Cuatro lados iguales paralelos dos a dos. Ángulos opuestos iguales no rectos. Diagonales distintas no perpendiculares y que se cortan en su punto medio.

TRAPECIO: Es aquel que tiene dos lados paralelos y otros dos no.

Clasificación: trapecio isósceles, trapecio rectángulo y trapecio escaleno. Fig. 85.

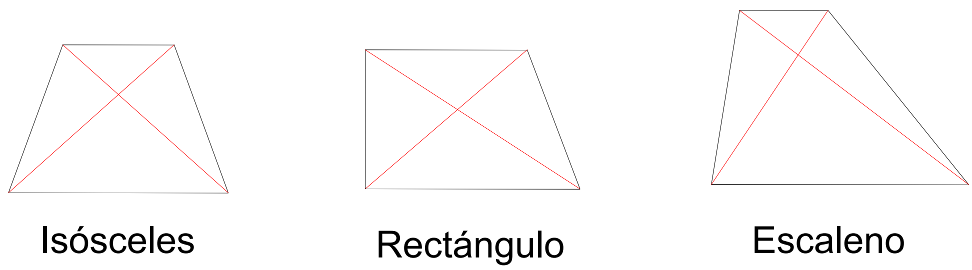


Fig. 85

TRAPECIO ISÓSCELES: Lados y ángulos iguales dos a dos. Diagonales iguales que no se cortan en su punto medio.

TRAPECIO RECTÁNGULO. Lados distintos. Ángulos dos de ellos rectos. Diagonales distintas que no se cortan en su punto medio.

TRAPECIO ESCALENO: Todos su lados y ángulos son distintos. Las diagonales distintas no se cortan en su punto medio.

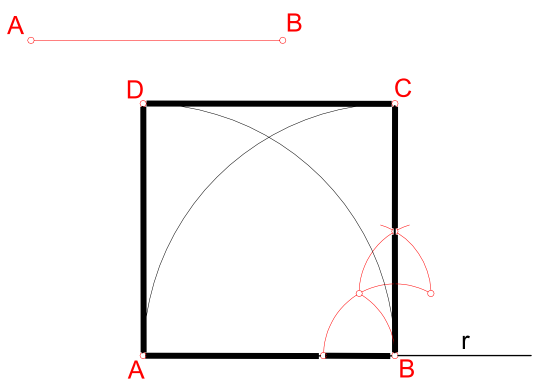


Fig. 86

14.1. Cuadrado

a) Construcción de un cuadrado regular dado el lado. Fig. 86.

Sea el lado ***AB***:

Sobre una recta ***r*** cualquiera, llevamos el valor del lado dado.

Por el extremo ***A*** y ***B***, levantamos dos perpendiculares.

Haciendo centro en ***A*** y ***B*** traza dos arcos hasta que corten a las perpendiculares anteriores, obteniendo los vértices ***C*** y ***D***.

b) *Cuadrado regular, dada la diagonal. Fig. 87.*

La diagonal del cuadrado coincide con el radio de la circunferencia circunscrita.

Con centro en **O**, trazamos la circunferencia circunscrita.

Seguidamente, trazamos sus diámetros ortogonales obteniendo los puntos ***A, B, C, D***.

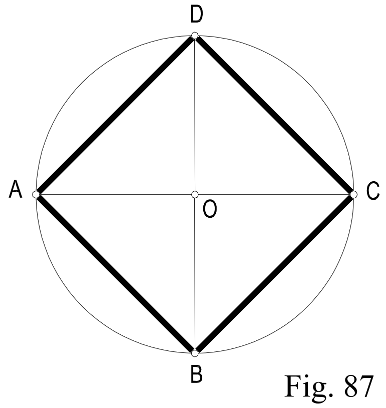


Fig. 87

Uniendo los puntos **A, B, C, D,** tenemos la solución.

14.2. Rectángulo

a) Construcción de un rectángulo dada el lado y la diagonal. Fig. 88.

Bastará con construir dos triángulos rectángulos, dada la hipotenusa y un lado.

Sobre una recta ***r***, llevamos el valor del lado ***AB***.

Por el extremo ***B*** levantamos una perpendicular.

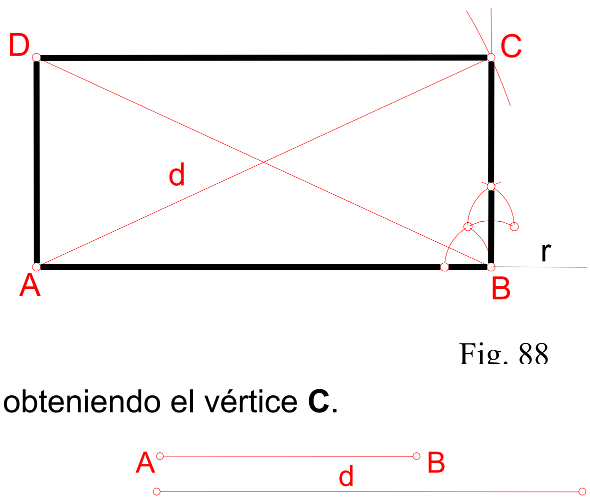


Fig. 88

Haciendo centro en **A** y con radio el valor de la diagonal **d**, trazamos un arco, obteniendo el vértice **C**.

Repetimos la operación en el punto **A**.

14.3. Rombo

a) Construcción de un rombo dada la diagonal y un lado. Fig. 89.

Sea el lado ***AB*** y la diagonal ***d***:

Será preciso construir el triángulo isósceles dado por la diagonal y el lado. (dos datos).

Trazamos la mediatriz de la diagonal dada ***d***.

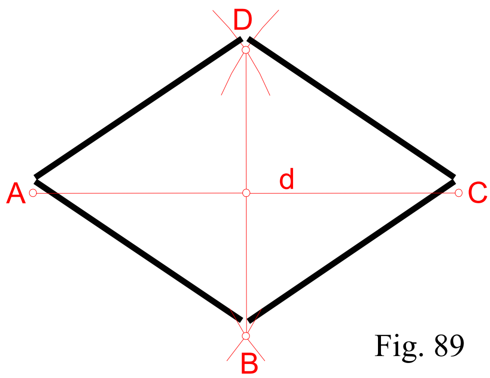


Fig. 89

Haciendo centro en los extremos ***A*** y ***B*** trazamos dos arcos con el valor ***AB*** que determinan los vértices ***C*** y ***D***.

14.4. Romboide

a) Construcción de un romboide dado dos lados y la diagonal. Fig. 90.

Sean los lados **AB** y **BC**, y la diagonal **d**.

Como la diagonal divide al romboide en dos triángulos escálenos. Bastará con construir dicho triángulo conociendo tres de lados.

Sobre una recta llevamos el valor del lado **AB**.

Con centro en ***A*** trazamos un arco de radio el valor de la diagonal ***d***.

Con centro en ***B***, repetimos la operación con el valor del lado ***BC***, obteniendo el vértice ***C***.

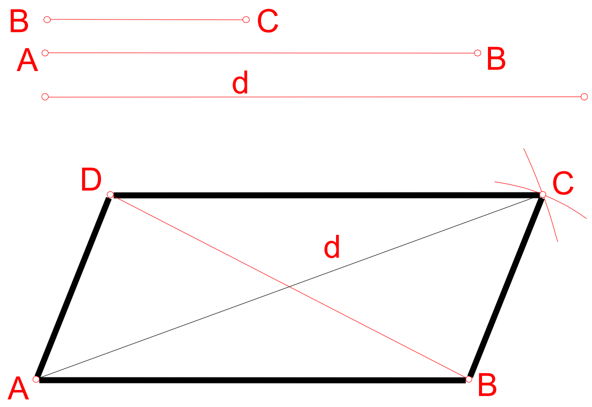


Fig. 90

La unión de ***ABC*** determina uno de los triángulos. Repitiendo la operación tendremos el otro.

b) Construcción de un romboide dado dos lados y el ángulo que forman. Fig. 91

Sea el ángulo **A** y los lados **AB** y **AD**:

Bastará con construir un triángulo escaleno conociendo dos lados y el ángulo comprendido.

Sobre una recta r y en su extremo, construimos el ángulo ***A***.

Con centro en ***A*** y radio **AB** trazamos un arco punto ***B***.

Con centro en ***A*** y radio ***AD*** trazamos otro arco, punto ***D***.

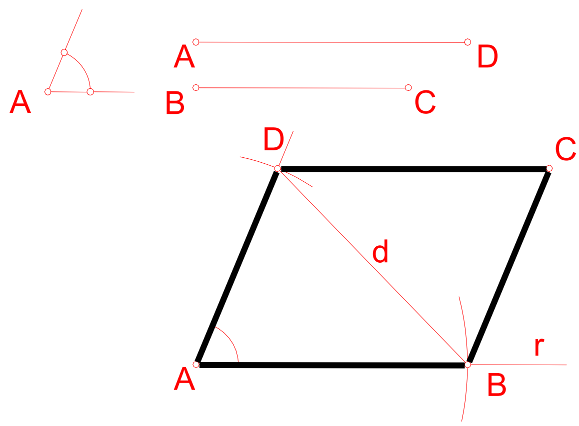


Fig. 91

La unión de ***ABD***, determina uno de los triángulos.

El otro se halla de forma similar.

c) Construcción de un romboide dado dos lados a y b y el ángulo menor de las diagonales que vale 75º (opuesto al lado dado a). Fig. 92.

Resolveremos el ejercicio por medio de arco capaz, teniendo en cuenta que el lado ***b*** es paralelo a la mediana ***ma*** del triángulo formado por el lado ***a*** y el ángulo que forman las diagonales.

Sobre una recta llevamos el lado ***a.***

Construimos el arco capaz de ***75º.***

Con centro en ***m*** y radio la mitad del lado ***b***, (mediana del triangulo buscado) trazamos un arco que determina el punto ***O1***.

La unión de ***A, B, O1***, nos determina el triangulo que forma las diagonales y el lado ***a.***

Prolongamos la diagonal A ***O1.*** y con centro en ***B*** y radio ***b***, trazamos un arco, obteniendo teniendo el vértice ***C.***

Mediante paralelas completamos el ejercicio.

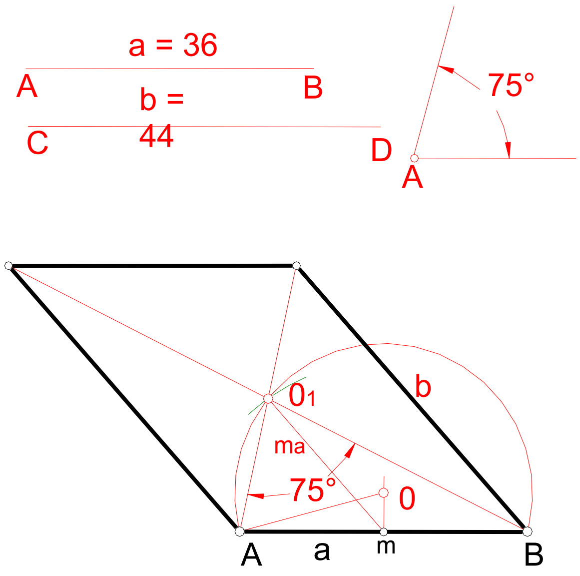


Fig. 92

14.5. Trapecio

a) Trapecio rectángulo conociendo la base mayor la altura y el ángulo que forma dicha base con el lado. Fig. 93.

Sea **b** la base mayor, **h** la altura y **α** el ángulo que forma la base mayor con el lado **b**.

Sobre una recta llevamos la base mayor ***b***.

En el extremo **A** levantamos una perpendicular **h**.

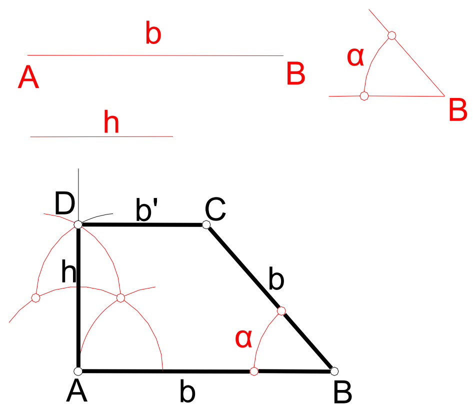


Fig. 93

Llevamos sobre dicha perpendicular el valor **h** dado, punto **D**.

En el extremo **B**, trasladamos por medio del compás el ángulo **α**.

Por **D** trazamos una paralela a la base mayor, obteniendo el vértice **C.**

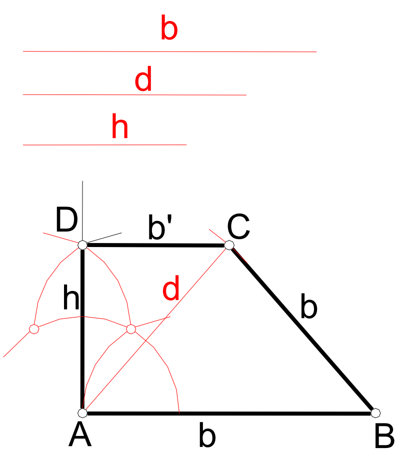


Fig. 94

b) Trapecio rectángulo conociendo la base mayor b la altura h y la diagonal d. Fig. 94.

Sea ***b*** la base mayor, ***h*** la altura y ***d*** la diagonal.

Sobre una recta llevamos la base mayor ***b***.

En el extremo ***A*** levantamos una perpendicular ***h***.

Llevamos sobre dicha perpendicular el valor ***h*** dado, punto ***D***.

Por ***D*** trazamos una paralela ***b'*** a la base mayor ***b.***

Haciendo centro en ***A*** y con el valor de la diagonal ***d*** trazamos un arco que corta a ***b'*** en ***C.***

c)Trapecio isósceles dada la base mayor b la media bm y la altura h. Fig. 95.

Sea ***b*** la base mayor y ***bm*** la media y ***h*** la altura.

Hallamos la mediatriz de ***b*** y a partir de ***3*** llevamos ***h.***

Hallamos la mediatriz de ***h***.

Llevamos a partir de ***3*** a cada lado ½ ***bm*** y levantamos dos perpendiculares hasta que corte a la mediatriz en los puntos ***1-2***

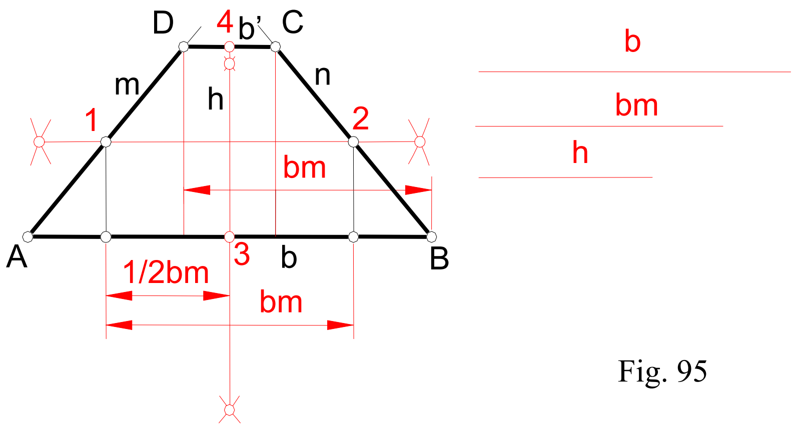


Fig. 95

Unimos ***A*** con ***1*** y ***B*** con ***2***

A partir de ***A*** y ***B*** llevamos el valor de la ***bm***.

Levantamos dos perpendiculares que cortarán a las rectas ***m*** y ***n*** en los puntos ***C*** y ***D***.

d) Trapecio escaleno dadas las dos bases b y b' y los dos ángulos adyacentes a la base mayor. Fig. 96.

Sean ***b*** la base mayor, ***b'*** la menor, y ***A*** y ***B*** los ángulos adyacentes a la base mayor.

Llevamos sobre una recta el valor de la base mayor ***b***.

En sus extremos construimos por medio del compás los ángulos dados ***A*** y ***B***

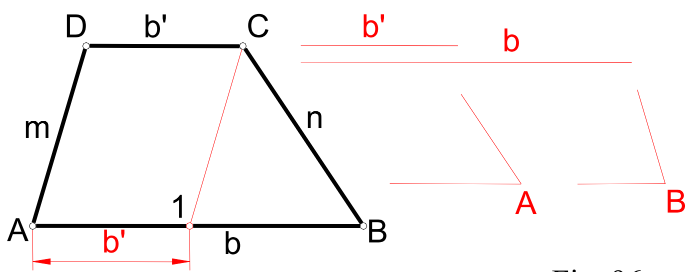


Fig. 96

A partir de ***A*** llevamos el valor de la base menor.

Por el punto ***1*** trazamos una paralela a la recta ***m*** que corta a la ***n*** en ***C***.

La unión de ***D*** y ***C*** nos determina el trapecio.

e) Trapezoide dados los cuatro lados y la altura correspondiente a uno de ellos. Fig. 97.

Sean los lados ***a***, ***b***, ***c*** y ***d*** y la altura ***ha***.

Sobre una recta llevamos el valor del lado ***a***.

En un punto cualquiera de ella, trazamos una recta perpendicular, llevando el valor correspondiente a la altura ***ha***.

Con centro en ***A***, y radio el valor del lado **d**, trazamos un arco que cortará a la paralela ***h*** en el punto ***D***.

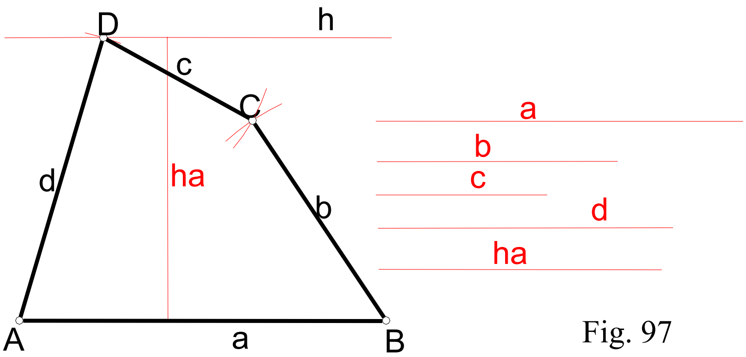


Fig. 97

Con radio ***c***, y haciendo centro en ***C***, trazamos un arco.

Con centro en ***B*** y radio *B*, trazamos otro arco. Ambos se cortan en el vértice ***C***. La unión de todos ellos nos determinan el trapezoide.

15) Polígonos

15.1. Construcción de polígonos dado el radio de la circunferencia circunscrita

El triángulo y el cuadrado han sido visto con anterioridad, por tanto comenzaremos por aquellos superiores a 4 lados.

a) Hexágono regular dado el radio de la circunferencia circunscrita Fig. 98.

Tendremos en cuanta que el valor del lado es igual al radio ***r*** de la circunferencia.

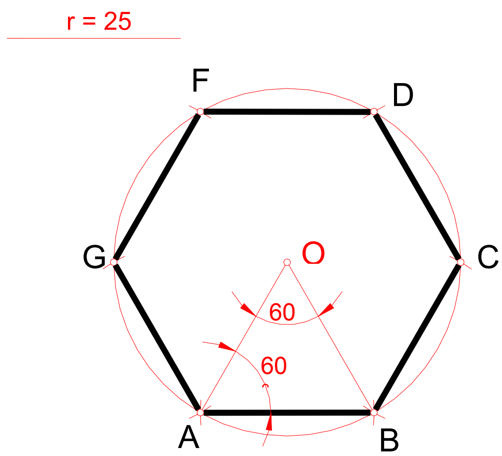


Fig. 98

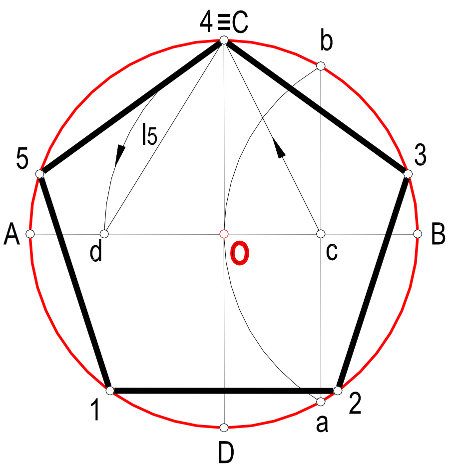


Fig. 99

b) Pentágono regular dado el radio de la circunferencia circunscrita. (procedimiento exacto). Fig. 99.

Con centro en ***O***, trazamos la circunferencia circunscrita y seguidamente sus diámetros ortogonales ***A, B, C, D***,

Hallamos la mediatriz del radio, punto ***c***.

Hacemos centro en ***c*** y con radio ***cC***, trazamos el arco ***Cd***.

La distancia ***dC***, será **L5**, lado del pentágono.

c) Heptágono regular dado el radio de la circunferencia circunscrita. (procedimiento aproximado). Fig.100.

Con centro en ***O***, trazamos la circunferencia circunscrita y seguidamente sus diámetros ortogonales,

Hallamos la mediatriz del radio, punto ***c***.

El segmento ***cb***, será el lado ***L7***.

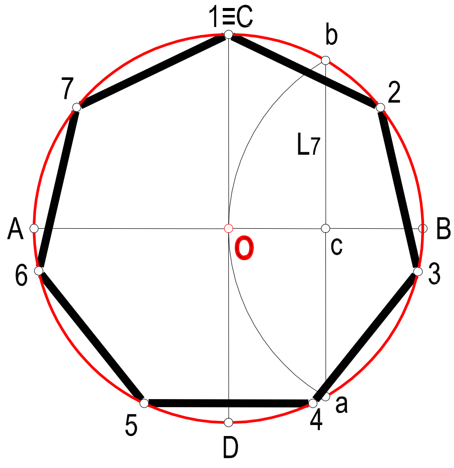


Fig. 100

d) Octógono regular, dado el radio de la circunferencia circunscrita. Fig. 101.

Con centro en ***O***, trazamos la circunferencia circunscrita, seguidamente, sus diámetros ortogonales, ***1-2*** y ***3-7***.

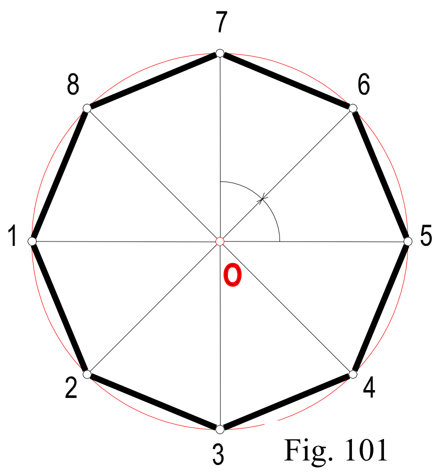


Fig. 101

Hallamos la bisectriz de los ángulos de 90º, obteniendo el resto de los puntos.

e) Decágono regular dado el radio de la circunferencia circunscrita. Fig. 102.

Su construcción es similar al pentágono.

Con el valor del radio trazamos una circunferencia.

Hallamos la mediatriz del radio, ***OB*** punto **c**.

Con centro en **c** y radio **c C**, trazamos un arco, punto **d**.

La distancia **dO**, será el valor del lado buscado.

f) Eneágono dado el radio de la circunferencia circunscrita. Fig. 103

Trazamos la circunferencia de centro ***O***.

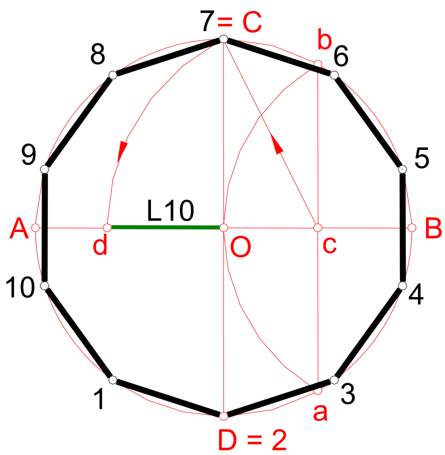


Fig. 102

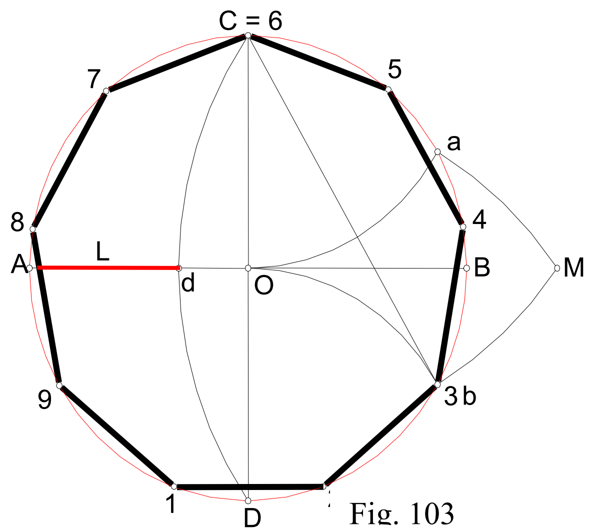


Fig. 103

Con centro en ***CD*** trazamos dos arcos con el valor del radio. Puntos ***a*** y ***b***.

Con centro en ***C*** y ***D*** trazamos dos arcos con el valor ***Cb*** y ***Da***, obteniendo el punto ***M***.

Haciendo centro en ***M*** trazamos un arco con el valor de ***MC***, obteniendo la recta ***dA***, que será el lado buscado ***L9***.

g) Procedimiento general de construcción de polígonos dado el radio de la circunferencia circunscrita. Fig. 104.

Dividir una circunferencia dada en 15 partes y construir el pentadecágono correspondiente.

Trazamos la circunferencia con el radio dado y sus ejes perpendiculares.

Dividimos el diámetro en ***15*** partes iguales.

Hacemos centro en los extremos ***A*** y ***B*** y trazamos dos arcos con el valor del diámetro, ambos se cortan en el punto ***M***.

Unimos ***M*** con las divisiones pares, obteniendo los puntos del ***9*** al***15***.

Para obtener el resto e los puntos podemos repetir la operación, uniendo los puntos impares, o bien llevar el lado obtenido. En este último caso la precisión es menor.

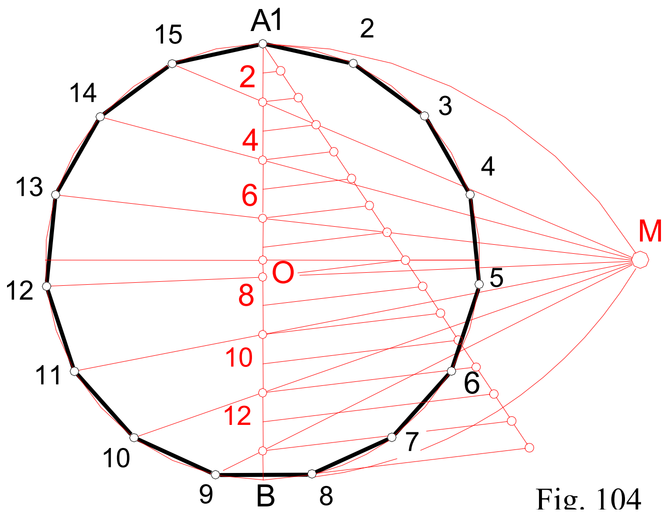


Fig. 104

15.2. Construcción de polígonos dado el lado

a) Pentágono dado el lado. Fig. 105.
Tendremos en cuenta que el lado del pentágono y su diagonal están en relación áurea. Por tanto su valor será ***1,618***.

Sobre una recta ***r*** llevamos el valor del lado.

Hallamos su mediatriz ***GD***.

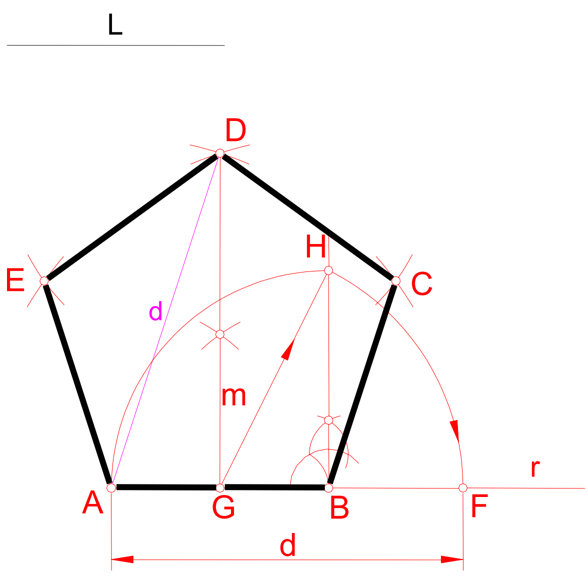


Fig. 105

Levantamos una perpendicular en el extremo ***B***.

Llevamos sobre dicha perpendicular el valor del lado ***L,*** punto ***H***.

Haciendo centro en ***G*** y radio ***GH*** trazamos un arco punto ***F***.

La distancia ***AF*** será la diagonal del pentágono.

Con centro en ***A*** y ***B*** y valor la diagonal ***d***, trazamos dos arcos, punto ***D***. Con el valor del lado se completa el ejercicio.

c) Construcción del heptágono dado el lado. Fig. 106.

El procedimiento es aproximado. Consiste buscar el centro de la circunferencia en la que queda inscrito el polígono.

Sobre una recta **r** llevamos el valor del lado **AB**.

Trazamos su mediatriz y levantamos una perpendicular por el extremo **B**.

En el extremo **A** construimos un ángulo de **30º** determinando el punto **n**.

Haciendo centro en **A** y radio **An** trazamos un arco que no fija en centro **O** de la circunferencia buscada.

Sobre esta circunferencia llevamos el valor del lado.

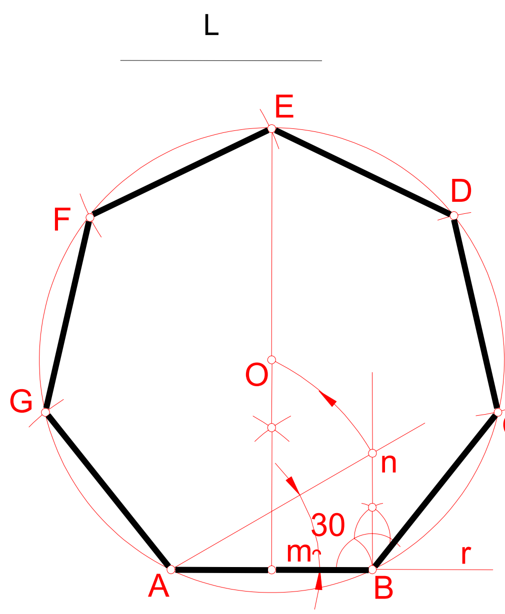


Fig. 106

d) Construcción del octógono dado el lado. Fig. 107.

Como en los casos anteriores hallaremos el centro de la circunferencia circunscrita.

Construimos un cuadrado que tenga por valor el lado del octógono ***L***.

La diagonal del cuadrado corta a la perpendicular en el punto medio del lado en ***O'.***

Con centro en ***O'*** trazamos una circunferencia que nos da el centro ***O***.

El resto del ejercicio es similar a los casos anteriores

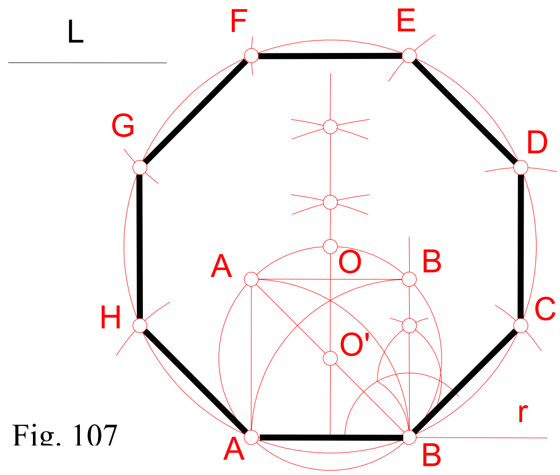


Fig. 107

e) Construcción del decágono dado el lado Fig. 108..

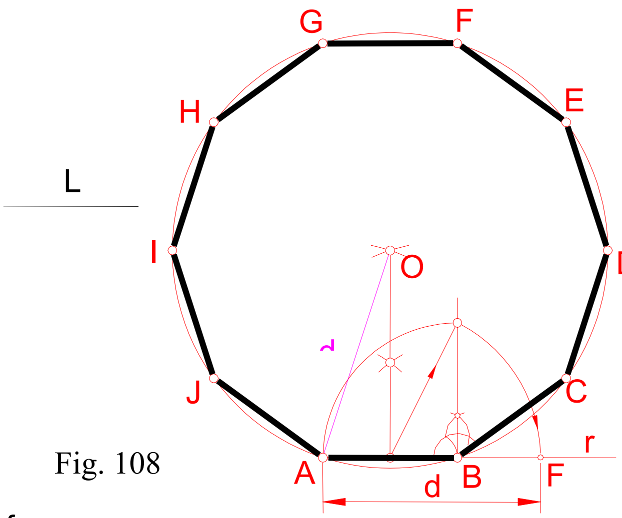


Fig. 108

Construiremos un pentágono que tenga por valor el del lado del decágono.

La diagonal de dicho pentágono nos determinara el centro ***O***.

f

f) Construcción del eneágono dado el lado (construcción aproximada) Fig. 109.

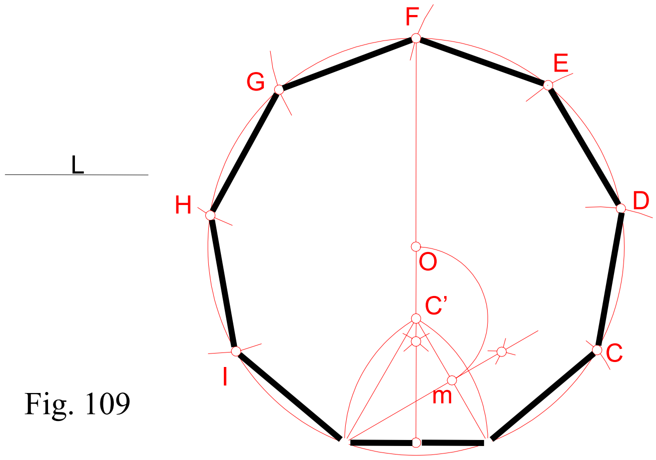


Fig. 109

Sobre una recta ***r*** llevamos el valor del lado ***L***.

Trazamos su mediatriz.

Construimos el triángulo equilátero ***ABC'.***
Seguidamente hallamos su bisectriz que corta a uno de los lados del triángulo en el punto ***m***.

Con centro en ***C'*** y radio ***C' m***, tramos un arco que nos determina el punto ***O***, centro de la circunferencia circunscrita al polígono. Se completa el ejercicio llevando el valor del lado sobre la circunferencia.

g) Por el procedimiento, general dibujar un polígono regular de 11 lados, dado el lado. Fig. 110.

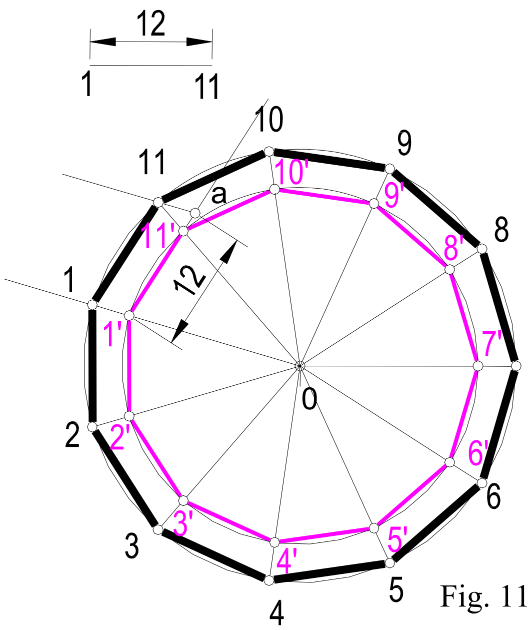


Fig. 110

El ejercicio se resuelve por semejanza.

Sea el lado ***1-11***,

Con centro en ***O***, construimos un polígono cualquiera de ***11*** lados.

Sobre uno de los lados, el ***1'-11',*** llevamos el lado dado ***1-11.*** Punto ***a.***

Por el punto ***a***, trazamos una paralela al radio ***1'-0***, hasta que corte a la prolongación del radio, ***0-11'*** en ***11***.

Trazando paralelas por 11 a los lados del polígono auxiliar obtendremos la solución.

15.3. Polígonos estrellados

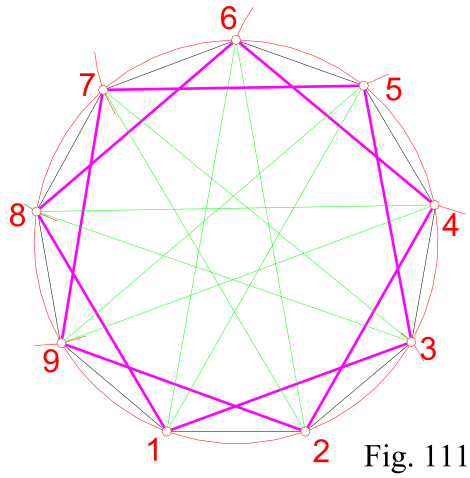


Fig. 111

Polígono regular estrellado, es aquel que se cierra después de recorrer más de una vez la circunferencia.

Para hallar los estrellados de un polígono tendremos en cuenta lo siguiente:

Numero de lados del polígono, de ellos hallaremos aquellos que sean menores que la mitad de ellos. Por último elegiremos todos aquellos que sean primos el el número de lados.

Por ejemplo: a) Hallar el polígono estrellado del eneágono. Fig. 111.

Número de lados	***9***
Números enteros menores que la mitad de los lados	***1, 2, 3, 4***
Números primos con 9	***2*** y ***4***

De ello se deduce que el eneágono tiene dos estrellados. Uniendo los vértices de ***2*** en ***2*** y de ***4*** en ***4***.

b) Heptágono estrellado. Fig. 112

Número de lados	***7***
Números enteros menores que la mitad	***1, 2, 3***
Números primos con 7	**2,3**

Este será el orden de unión de los vértices.

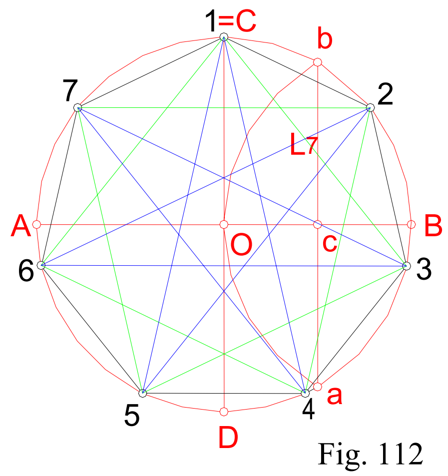


Fig. 112

CUARTA UNIDAD. Igualdad. Semejanza. Equivalencia. Proporcionalidad y Escalas.

Contenido:
Conceptos Generales
Igualdad, semejanza y simetría
Media proporcional
Equivalencia
Escalas gráficas y volantes

16) Igualdad.

Dos figuras son iguales cuando tienen sus lados iguales y sus ángulos iguales, de tal forma que si se superponen coinciden.

Construcción de figuras iguales.

a) Descomposición en triángulos.(método de triangulación). Fig. 114

Es el método más preciso, ya que consiste en trasladar triángulos..

Descomponemos la figura en tres triángulos.

Llevamos sobre una recta uno de los lados por ejemplo el ***AB****.*

Construimos el triángulo ***ABE = A'B'E'.***

Completamos el ejercicio construyendo los triángulos ***BDE = B'D'E'*** *y* ***BCD = B'C'D'***

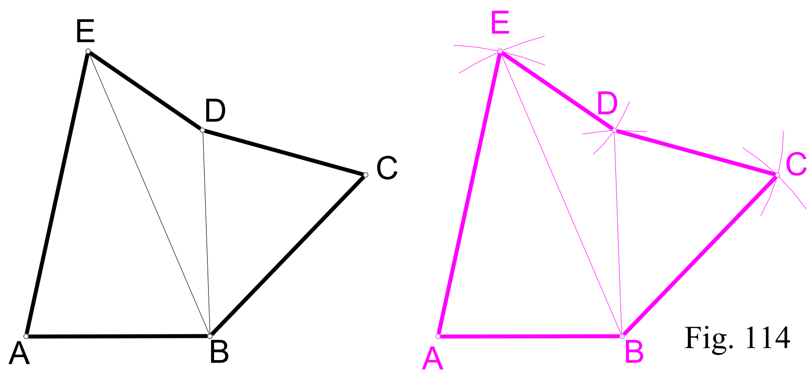


Fig. 114

b) Construcción de una figura igual a otra por el método de ángulos. Fig. 115.

Al utilizar el compás para el traslado de los ángulos, este método es menos preciso que el anterior.

Sea la figura ***ABCDE***.

Consiste en transportar los ángulos y los segmentos que componen el polígono.

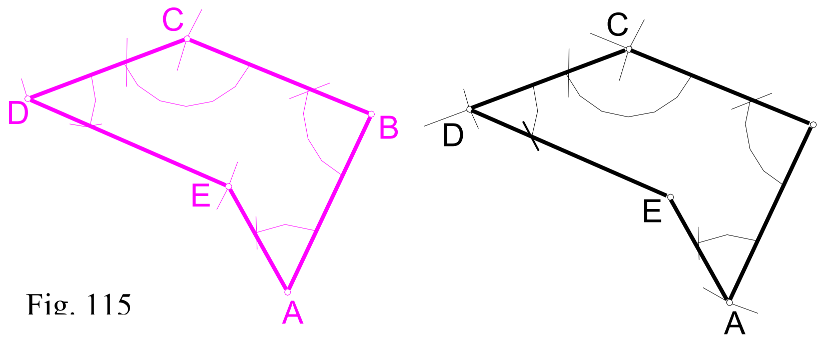


Fig. 115

c) Construcción de una figura igual a otra por el método de coordenadas. Sea el polígono ABCD. Fig. 116.

Sea el polígono ***ABCD***.

Hacemos pasar una recta cualquiera por el vértice ***A***.

Partiendo de la figura original, se trazan los ejes X e Y, haciéndolos coincidir con los vértices ***D*** y ***A***.

Se trazan perpendiculares al eje ***X*** por los vértices restantes ***C*** y ***B***, hasta obtener los puntos, ***O***, **1**, ***2***,

Para construir la figura se dibujan dos ejes coordenados **X** e **Y.**

Sobre el eje ***X***, y haciendo uso del compás, se llevan los puntos obtenidos ***O'***,***1'***,***A'***, ***2'***

Levantamos perpendiculares al eje ***X***, y obre ellas, se llevan las coordenadas, ***O'D'***, ***1'C'***, ***2'B'***

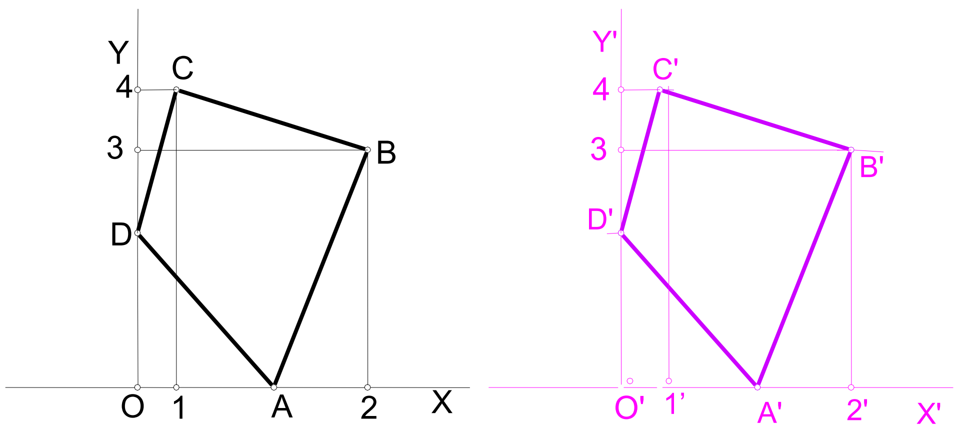


Fig. 116

d) Construcción de una figura igual a otra por radiación. Fig. 117.

Sea la figura **ABCD**.

Elegimos un punto cualquiera **O** de la figura **ABCD**.

Unimos todos los vértices con dicho punto.

Elegimos otro punto cualquiera **O'** y trasladamos los ángulos **α, β, μ.**

Medimos los segmentos **OA**, **OB** etc. y los y trasladamos.

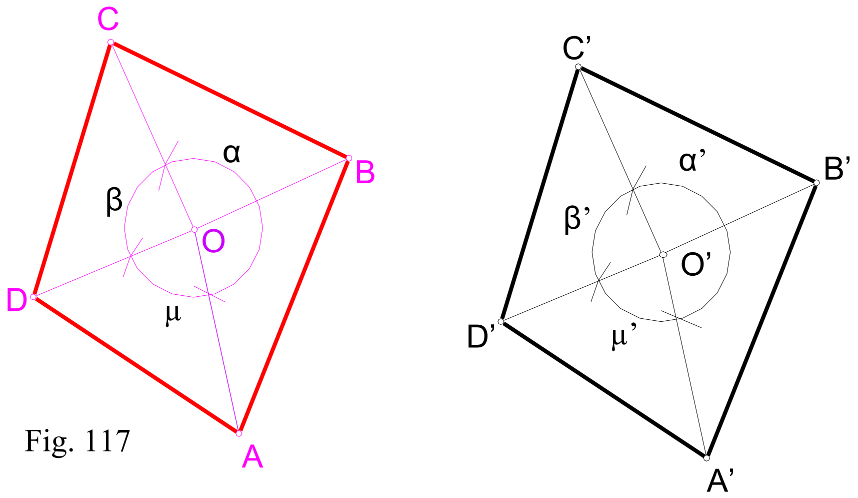


Fig. 117

17) Semejanza

Dos figuras son semejantes, cuando teniendo el mismo número de lados, estos son proporcionales y los ángulos formados entre ellos son iguales.

La razón existente entre dos figuras semejantes se llama, *razón de semejanza.*

A) ***Dada la poligonal A, B, C, D, E. y el centro de homotecia "O". Hallar la figura semejante cuya razón de semejanza sea 1/3. Fig. 118.***

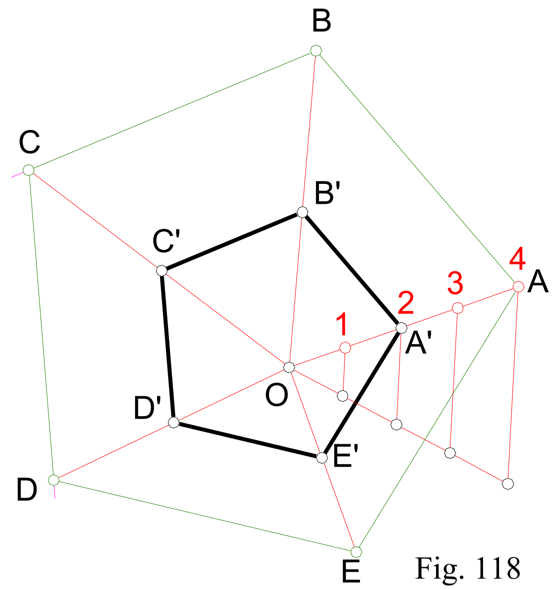


Fig. 118

Se unen todos los vértices con el centro de homotecia "***O***".

Uno de dichos segmentos se divide en tantas partes como indique el denominador, es decir tres.

Seguidamente a partir de "***O***" se toman tantas divisiones como indique el numerador es decir, una.

Por el extremo de dicha división se trazan paralelas a los lados de la poligonal, obteniendo los vértices ***A'. B'. C'. D', E'***

b) Dada la poligonal A, B, C, D, E. y el centro de homotecia "O". Hallar la figura semejante cuya razón de semejanza sea 3/5. Fig. 119.

Se unen todos los vértices con el centro de homotecia "***O***".

Uno de dichos segmentos se divide en tantas partes como indique el denominador, es decir cinco.

Seguidamente a partir de "***O***" se toman tantas divisiones como indique el numerador es decir, tres.

Por el extremo de dicha división se trazan paralelas a los lados de la poligonal, obteniendo los vértices ***A'. B'. C'. D', E'***

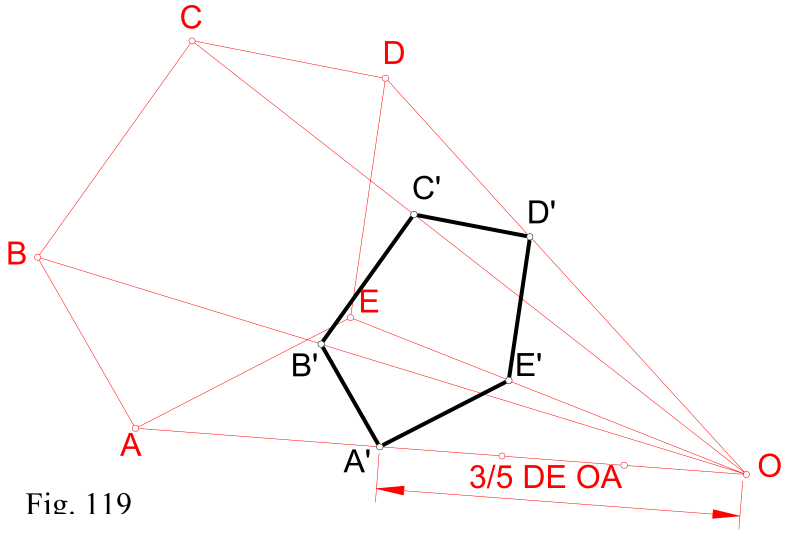


Fig. 119

18) Simetría

Se dice que dos puntos son simétricos respecto a otro, tomado como centro, cuando estando contenidos en una recta que pasa por en punto centro, sus distancias al mismo son iguales.

En la figura los puntos ***B*** y ***B***' son simétricos con respecto al centro ***O***. Fig. 120.

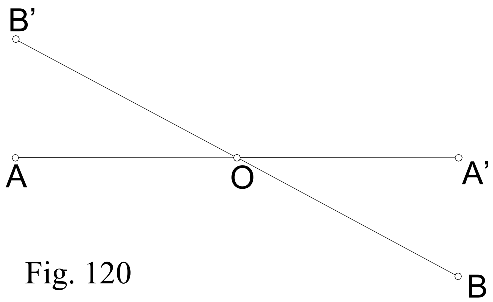


Fig. 120

Dos puntos son simétricos con respecto a un eje, cuando tomados sobre una perpendicular al mismo sus distancias son equidistantes. Fig. 121.

Los puntos ***A*** y ***A'*** son simétricos con respecto al eje ***YY'.***

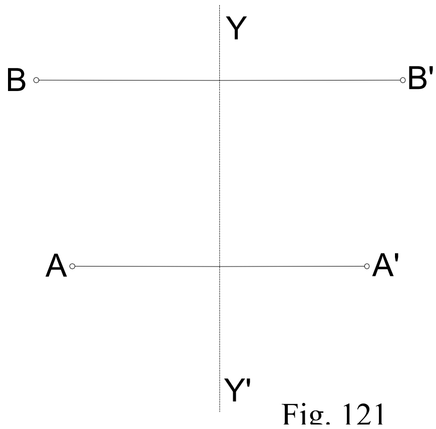


Fig. 121

Dos líneas son simétricas, cuando lo son todos sus puntos. Cuando se trata de segmentos rectilíneos bastará con que sean los extremos de los mismos.

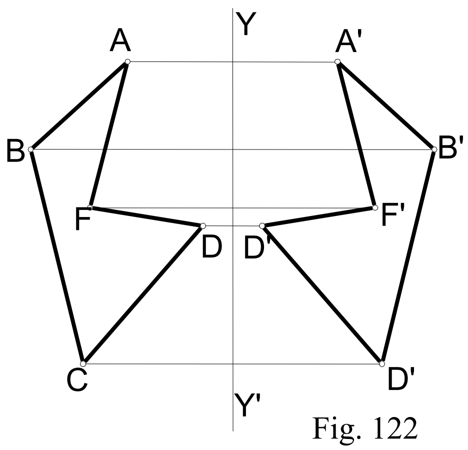


Fig. 122

Para trazar un segmento ***A'B***', simétrico de otro ***AB,*** bastará con trazar por los extremos de dichos segmentos rectas perpendiculares al eje ***YY'***, y transportar las distancia que separa cada punto del eje. Fig. 122.

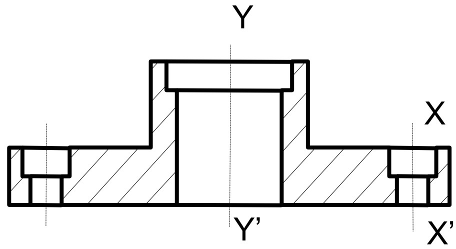


Fig. 123

Existen figuras en las que se dispone de varios ejes de simetría. En la figura el eje ***YY’*** es un eje principal y el ***XX’*** es secundario. Fig. 123.

19) Proporcionalidad.

a) Teorema de Thales

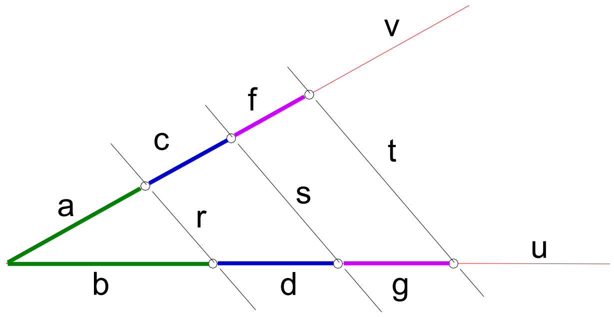


Fig. 124

Si una familia de rectas paralelas ***r, s, t,*** son cortadas por dos rectas oblicuas a ellas, ***u, v,*** los segmentos en que estas últimas cortan a las primeras serán proporcionales. Fig. 124.

a/b = c/d = f/g

b) División de un segmento en un número determinado de partes iguales. Fig. 125.

Sea el segmento ***AB.***

En el extremo ***A*** se traza una recta con una inclinación arbitraria.

Sobre dicha recta se llevan tantas divisiones iguales y de longitud arbitraria como partes se quiera dividir el segmento ***AB***, por ejemplo siete divisiones, ***1’, 2’, 3’*** etc. utilizando el compás.

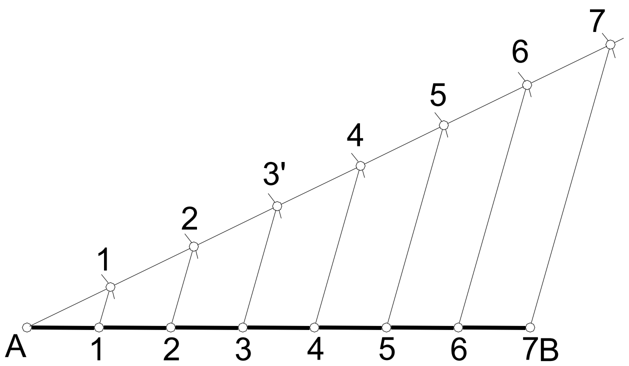


Fig. 125

Se une la ultima división ***7*** con el extremo **B**.

Seguidamente se trazan paralelas a la recta ***7’ B*** por el resto de las divisiones.

Dichas paralelas nos determinan los puntos de división ***1, 2, 3, 4*** etc. del segmento ***AB***.

c) Tercera proporcional de dos segmentos (primer procedimiento). Fig. 126

Sean los segmentos ***a*** y ***b***

Trazamos dos rectas cualquiera ***r*** y ***s***.

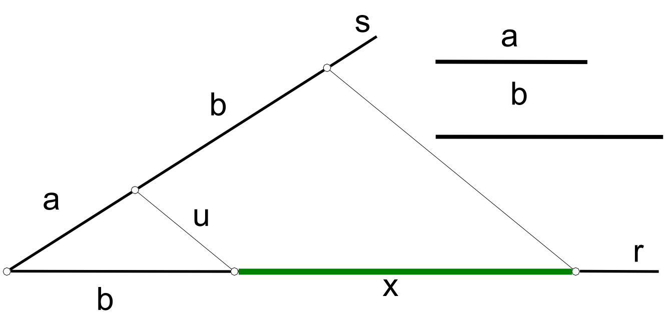


Fig. 126

Sobre un de ellas, por ejemplo la ***s***, se llevan los segmentos ***a*** y ***b***.

Sobre la otra recta se lleva el segmento ***b***.

Unimos el extremo de ***a*** con el extremo de ***b***, recta ***u***.

Por el extremo de ***b*** se traza una paralela a ***u*** hasta que corte a ***r***.

El segmento ***x*** será la tercera proporcional.

d) Tercera proporcional de dos segmentos (segundo procedimiento). Fig. 127.

Trazamos dos rectas cualquiera ***r*** y ***s***.

Por el extremo ***A***, llevamos los segmentos ***a*** y ***b***.

Unimos el extremo de ***a*** con el extremo de ***b***.

Haciendo centro en ***A***, trazamos un arco que corte a la recta ***s*** en el punto ***B***.

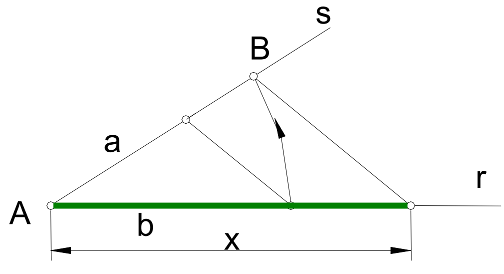


Fig. 127

Por ***B*** trazamos una paralela a la recta anterior.

El segmento ***x*** será la tercera proporcional buscada.

e) Cuarta proporcional de tres segmentos. Fig. 128.

Sean los segmentos ***a***, ***b***, y ***c***.

A partir de ***A*** trazamos dos restas arbitrarias ***r*** y ***s***.

Sobre una de las rectas, por ejemplo la ***r***, llevamos los segmentos ***a*** y ***b***.

Sobre la recta ***s***, llevamos el segmento ***c***.

Unimos los extremos ***a*** y ***c***, recta ***u***.

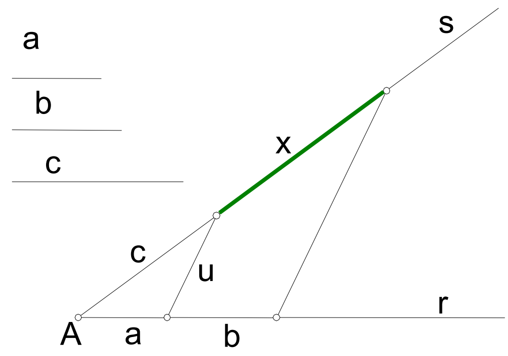


Fig. 128

Por el extremo de ***b***, trazamos una paralela a ***u*** hasta que corte a ***s***.

El segmento ***x*** será la cuarta proporcional.

f) Dividir un segmento en partes proporcionales a otros. Fig. 129.

Sean los segmentos ***AB***, ***a***, ***b***, ***c***, y **d**.

En el extremo de ***A***, trazamos una recta arbitraria.

Sobre el extremo ***A***, llevamos los segmentos ***a***, ***b***, ***c*** y ***d***, uno a continuación del otro.

Unimos la última división con el extremo ***B***.

Por los extremos de ***a***, ***b*** y ***c***, trazamos paralela a la recta anterior, obteniendo los segmentos ***a', b',c', d',*** proporcionales a los dados.

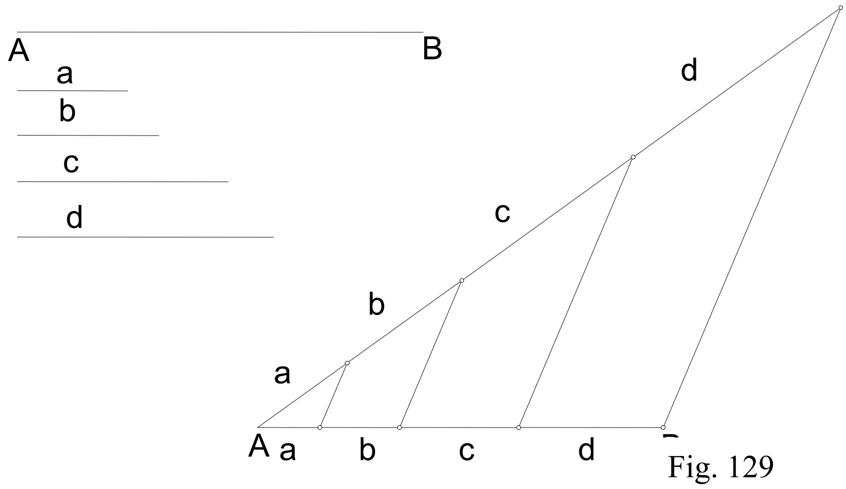


Fig. 129

g) Media proporcional de dos segmentos dados. (primer procedimiento). Fig. 130.

Para su construcción aplicaremos el Teorema de Euclides, conocido también como ***Teorema de la Altura***.

Este dice: *La altura de un triángulo rectángulo respecto a la hipotenusa es media proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre la misma.*

a / x = x / b   x2 = a * b

Sean los segmentos ***a*** y ***b*** y una recta ***r*** cualquiera.

Elegimos un punto cualquiera de dicha recta por ejemplo ***A***.

Llevamos a partir de dicho punto el segmento ***a*** y a continuación el ***b***.

Hallamos la mediatriz del segmento ***AC***, y trazamos la semicircunferencia que pase por dichos extremos de ***AB***.

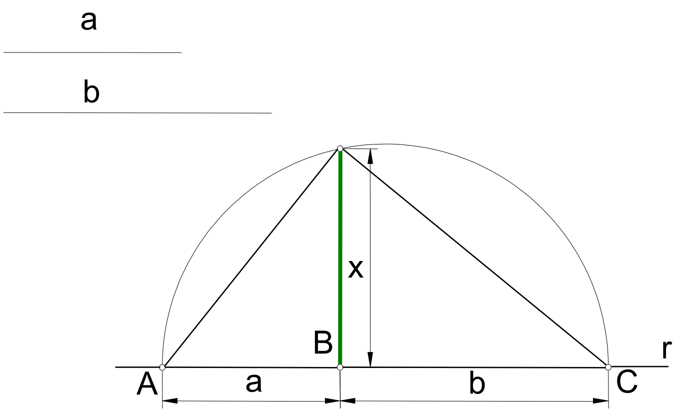


Fig. 130

La perpendicular trazada por ***B*** nos determina el segmento ***x*** media proporcional buscada.

g) Media proporcional de dos segmentos dados. (segundo procedimiento). Fig. 131.

En este segundo procedimiento aplicaremos el ***Teorema del Cateto.***

Este dice: *En un triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección del mismo sobre ella. Fig. 131.*

a / x = x / b   x2 = a * b

Sean los segmentos ***a*** y ***b*** y una recta ***r*** cualquiera.

Elegimos un punto cualquiera de la recta ***r*** por ejemplo ***A***.

A partir de ***A*** llevamos el segmento ***a*** y el ***b***.

Trazamos la circunferencia que pase por ***A*** y ***B***

Levantamos por ***C*** una perpendicular hasta que corte a la semicircunferencia en ***D***.

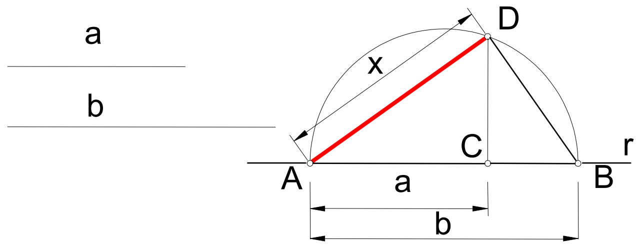


Fig. 131

La unión de ***D*** con ***A***, nos determina la media proporcional *x*.

20) Equivalencia

Se dice que dos figuras son equivalentes, cuando sus superficies son iguales, aunque su forma sea distinta.

a) Dado un triángulo A, B, C, cualquiera dibujar otro equivalente. Fig. 132.

Teniendo en cuenta que la superficie de un triángulo es su base por la altura. Si no variamos estos dos elementos, podremos obtener infinitos triángulos.

Trazamos una recta cualquiera -***s*** - paralela a uno de los lados, por ejemplo al lado - ***BC*** –

Cualquier punto de la recta – ***s***- unido con - ***AB*** **-** determina un triángulo equivalente al dado.

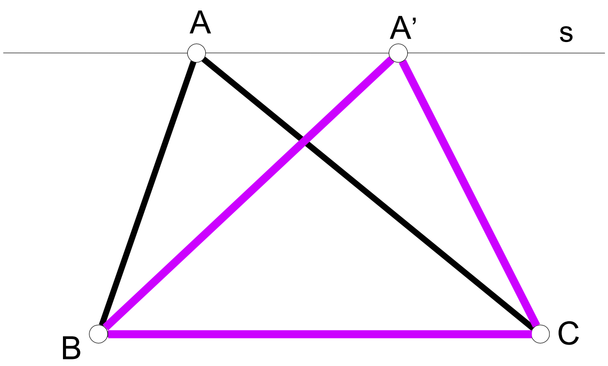


Fig. 132

b) Dado un polígono cualquiera de vértices a, b, c, d, f, g, dibujar otro con dos lados menos. Fig. 133.

Nos basamos en el ejercicio anterior.

Unimos el vértice –***D*** - con – ***B –***

Trazamos por ***C*** una paralela al lado - ***DB*** – y donde se corte con la prolongación del lado – ***AB*** nos determina el punto ***- B'-.***

Unimos – ***B***' – con –***D*** - y tenemos un lado menos.

Repetimos la operación con los vértices ***A, G, F***.

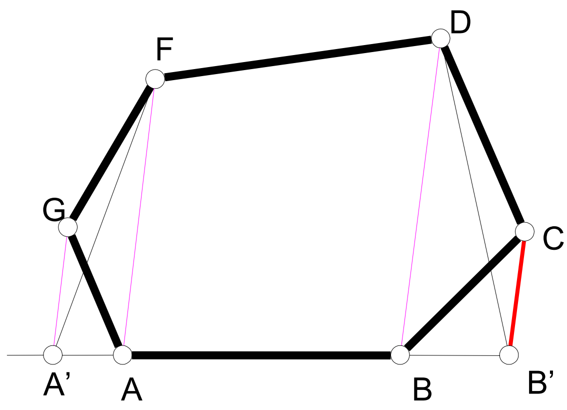
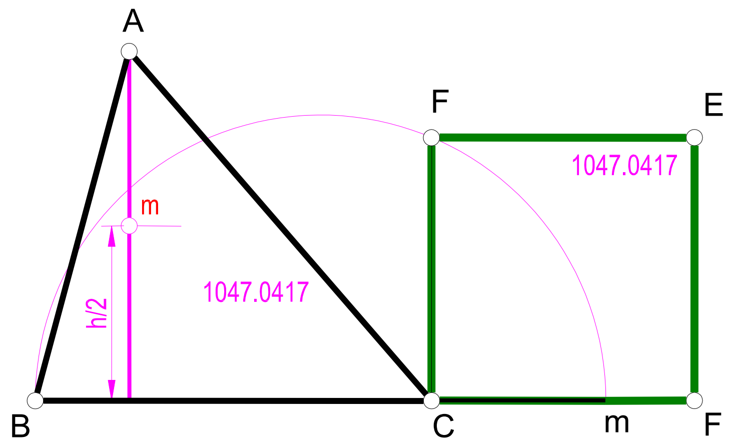


Fig. 133

c) Dibujar el cuadrado equivalente al triángulo, A, B, C. Fig. 134.

Bastará con resolver una pequeña ecuación:



Superficie del cuadrado ***Sc = L*L***
Superficie del triángulo ***St = ½ b * h***
Igualamos las áreas ***L*L = ½ h * b***

De acuerdo con lo anterior, hallamos el segmento media proporcional entre la mitad de la altura del triángulo su base.

El segmento – ***CF***- será el lado que buscamos.

Fig. 134

c) ***Dado un pentágono A, B, C, D, E, dibujar el triángulo equivalente. Fig. 135.***

Unimos el vértice - ***C*** - con - ***E*** –

Prolongamos el lado -***AE*** –

Trazamos por ***D*** la paralela - ***D E'.***

*Unimos –**C**- con –**E'**-.*

Repetimos la operación para el triángulo -***ABC***-.

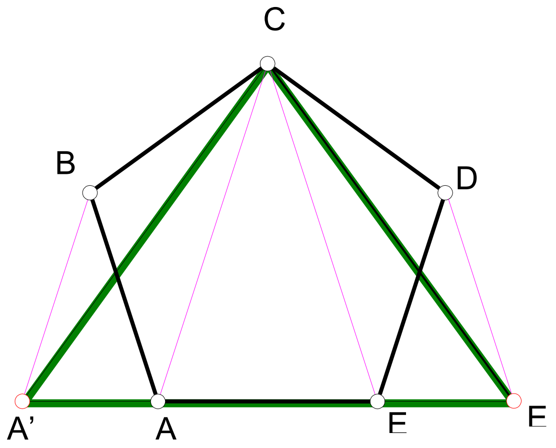


Fig. 135

20.1. Sección áurea de un segmento

Denominamos sección áurea del segmento **AC**, a la división que se produce en el mismo, de tal forma que la relación existente entre la parte mas pequeña y la mas grande es la misma que la existente entre la mas grande y su totalidad. Fig. 136.

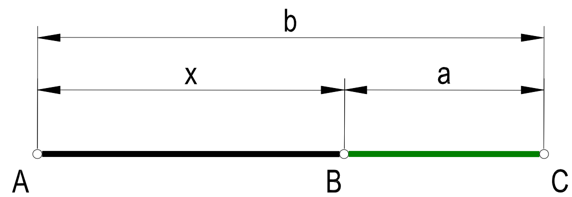


Fig. 136

a/x = x/b

a) ***Hallar la división áurea de un segmento dado. Fig. 137.***

Sea el segmento ***AB.***

Por el extremo ***B***, trazamos una recta perpendicular.

Sobre dicha perpendicular llevamos la mitad del

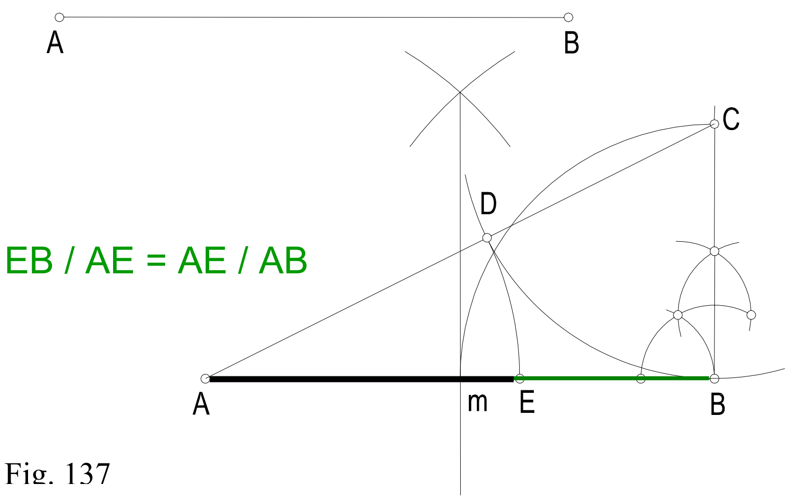


Fig. 137

segmento ***AB,*** punto ***m,*** que corta a la perpendicular en ***C.***

Unimos ***A*** con ***C***, y haciendo centro en ***C*** y con radio ***CB***, trazamos un arco que corta a la recta ***AC*** en ***D***.

Por último, con centro en ***A*** trazamos el arco ***AE***, parte áurea del segmento ***AB***.

b) Dado un cuadrado, dibujar el rectángulo áureo. Fig. 138.

El rectángulo cuyos lados están relacionados según la proporción áurea, se denomina rectángulo áureo.

Este es un rectángulo especial armonioso en sus proporciones. Los egipcios conocían esta proporción y la usaron en arquitectura. Los Griegos también la usaron en sus construcciones, por ejemplo El Partenón. Las dimensiones del D.N.I, están en proporción áurea. En España, en la Alhambra, el Escorial y otros muchos edificios se ha tenido en cuenta. Fig. 139.

Partimos de un cuadrado cualquiera de lado ***2*** unidades vértices ***A, B, C, D.***

Hallamos la mediatriz del lado que valdrá ***1***, punto ***m***. Se demuestra fácilmente que ***m C***, vale √***5***. Haciendo centro en ***m***, trazamos un arco, que corta a la prolongación de lado en ***D.*** El segmento ***AD*** será igual a ***1+ √ 5 ,*** por tanto la proporción entre los dos lados vale ***(1+ √ 5) /2* = 1,61803**. **A este número se le llama Número de oro.**
Lo obtuvieron los griegos al hallar la relación entre la diagonal de pentágono y el lado.

Fig. 139

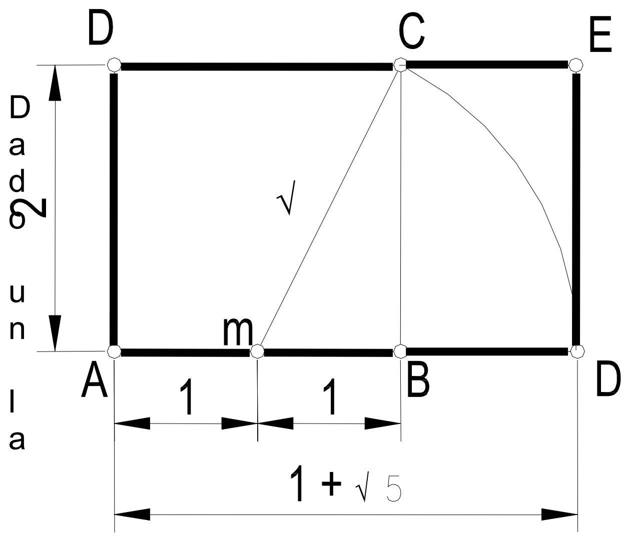


Fig. 138

c) Dado del rectángulo, hallar el otro, de tal forma que estén en proporción áurea. Fig. 140.

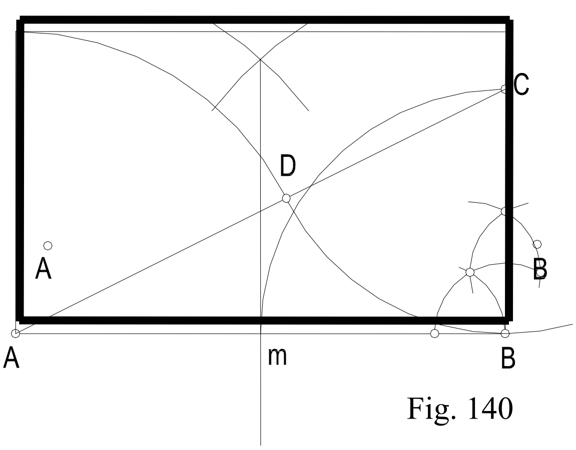


Fig. 140

Partimos del lado ***AB*** del rectángulo
Hallamos su mediatriz, punto ***m.***

Trazamos la perpendicular en el extremo ***A*** y ***B***.

Haciendo centro en ***B***, trazamos el arco ***mC***.

Unimos ***A*** con ***C***.

Haciendo centro en ***C***, trazamos el arco ***BD***.

Y por último haciendo centro en ***A***,
trazamos el arco ***AD***, que nos determina el lado menor del rectángulo áureo.

20.2. Escalas

Denominamos escala, ***E*** al cociente entre las dimensiones de un objeto en el dibujo ***Md*** y las correspondientes del mismo en la realidad ***Mr***.

$$E = Md / Mr$$

Las escalas pueden ser:

Ampliación si ***E > 1***
Reducción si ***E < 1***
Natural si ***E = 1***

Escalas normalizadas:
Aunque con fines puramente teóricos trabajaremos con cualquier escala, en el dibujo de planos o piezas industriales, las escalas normalizadas son las siguientes:

Reducción: ***1:2, 1: 5, 1:10, 1:50, 1:100***, ***1:500, 1:1000, etc.***
Ampliación: ***2:1, 5:1 y 10:1***

a) Construcción de la escala 2:3. Fig. 141.

Para su construcción tendremos en cuenta que ***2*** unidades del dibujo serán tres en la realidad, por tanto se trata de una escala de reducción. ***2/3= 0,6666 <1***

Sobre una recta cualquiera llevamos ***2*** cm.

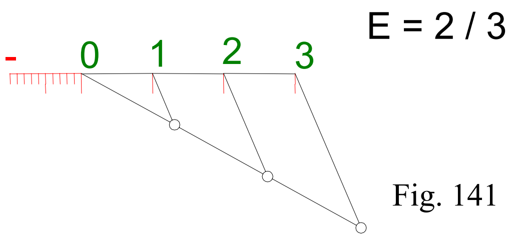


Fig. 141

Dividimos dicha recta en ***3*** partes iguales.

Cada una de las divisiones corresponderá a ***1*** cm. a escala ***2/3***.

Para apreciar las décimas construiremos la constraescala.

c) *Escalillas numérico gráficas. Fig. 142.*

Se consiguen por medio de un cálculo numérico
Vamos a realizar una escala cualquiera, por ejemplo la ***1/40***. es decir ***1***m. en el dibujo serán ***40*** en la realidad.

$$1/40 = 0{,}025\ m = 2{,}5\ cm$$

Es decir ***2,5*** cm del dibujo serán ***100 = 1 m***, en la realidad.

Para su construcción llevamos sobre una recta unidades de **2,5** cm. La contraescala se realiza de la forma vista anteriormente

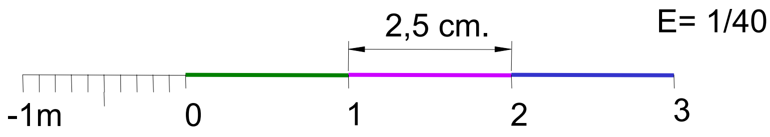


Fig. 142

d) *Construcción de la escala 1/200. Fig. 143.*

Se opera de forma similar, con la salvedad de la elección de la unidad que representemos en el papel.

$$1/200 = 0{,}005\ m$$

*Elegiremos **1000 cm = 10 m.** como unidad a representar.*

$$1/200 = 0{,}005\ m * 1000 = 5\ cm$$

Es decir que cada ***5*** cm en el papel serán ***10*** m. en la realidad.

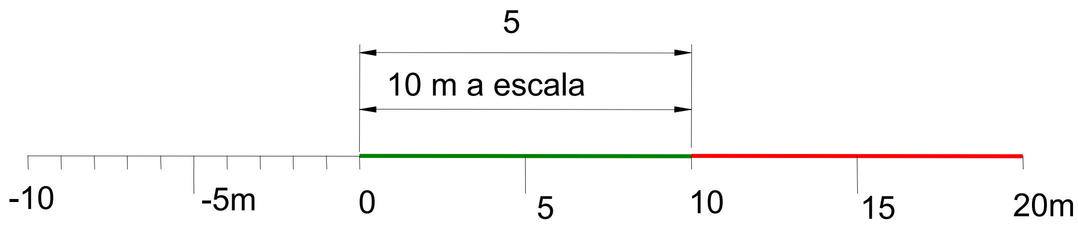


Fig. 143

20.3. Ejercicios de aplicación.

a) *Hallar el producto de los segmentos a y b dados considerando como unidad el cm. Fig. 144.*

Debe cumplirse la siguiente proporción ***1/a = b/x,***

Para ello sobre una recta se lleva la unidad de medida **1** cm y a continuación el segmento ***a***.

Por el extremo de ***a*** trazamos una recta cualquiera, llevando sobre ella el segmento ***b.***

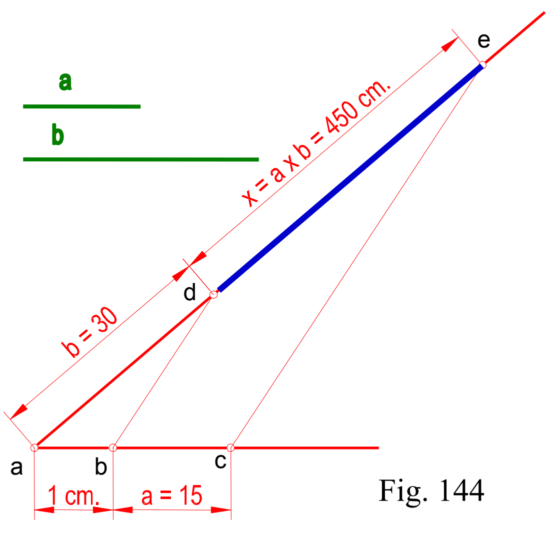
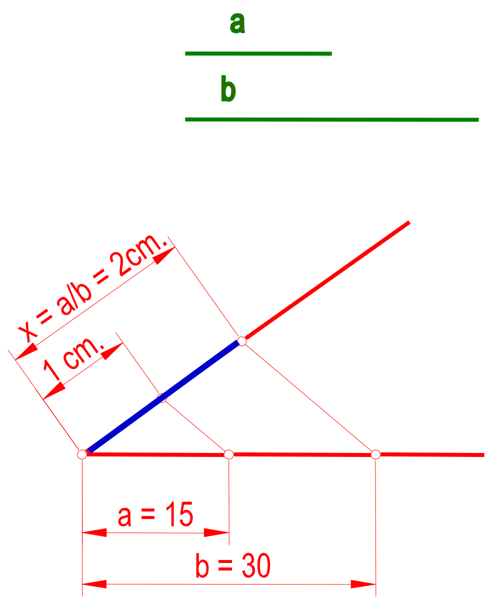


Fig. 144

Se une ***b*** con ***d*** trazando seguidamente la paralela ***ce***, que nos da ***a x b***.

b) Representar el segmento a/b siendo a y b dos segmentos dados. Se considera como unidad el cm. Fig. 145.



El ejercicio es similar al anterior, debe cumplirse la siguiente proporción ***a / b = x / 1***

Fig. 145

QUINTA UNIDAD. Potencia. Eje Radical.

Contenido:
Potencia
Eje radical
Centro radical

21) Potencia

Se llama potencia de un punto ***P*** con respecto a una circunferencia ***c*** al producto de ***P A * P B = k***, siendo ***A*** y ***B*** los punto de intersección de la circunferencia con una recta secante trazada desde ***P***. Fig. 146.

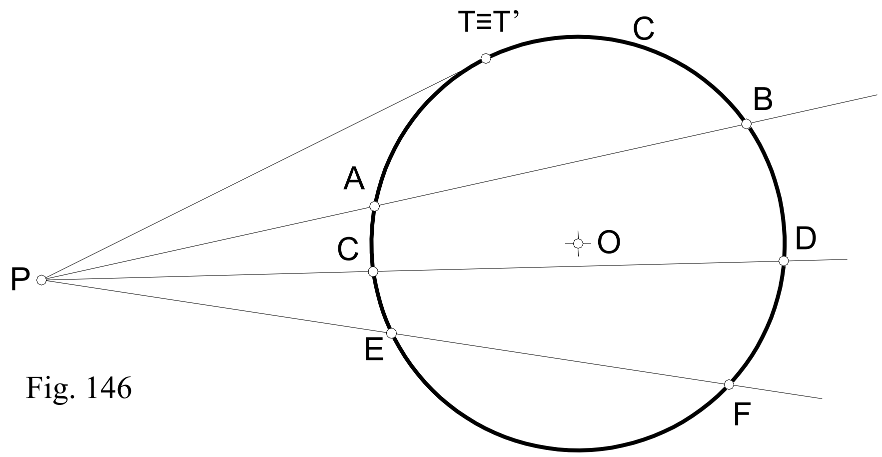


Fig. 146

Sea un punto ***P***, y ***C***, una circunferencia de centro ***O***. Si desde el punto ***P***, trazamos varias secantes a dicha circunferencia se verifica que:

P A * P B = P C *P D = P E * P F = k

donde ***k*** es la potencia del punto con respecto a la circunferencia. Siendo constante para cualquier recta secante o tangente que pase por ***P***.

Las rectas tangentes a la circunferencia son un caso límite en ellas se cumple que :

$$P A * P B = P T * P T' = P T^2$$

De donde se deduce que el punto de tangencia de una recta que pase por el punto ***P*** a una circunferencia **C**, será la media proporcional de los segmentos ***PA*** y ***PB.***

Si el punto ***P*** es exterior a la circunferencia, la potencia es positiva, ya que los segmentos ***PA*** y ***PB*** están orientados en el mismo sentido.

Si el punto está sobre la circunferencia, este coincide con uno de los puntos de intersección, la potencia será ***0***.

K = PA*PB = 0*PB = 0

Si el punto está dentro de la circunferencia, la potencia es negativa, ya que los segmentos ***PA*** y ***PB*** están orientados en sentido contrario.

PA *(-PB) = -k

21.1. Eje radical de dos circunferencias

Se denomina eje radical de dos circunferencias al lugar geométrico de los puntos del plano que tienen la misma potencia con respecto a ambas circunferencias. Fig. 147.

MA * MB = MC *MD.

El eje radical será siempre perpendicular a la recta que une los centros de ambas circunferencias.

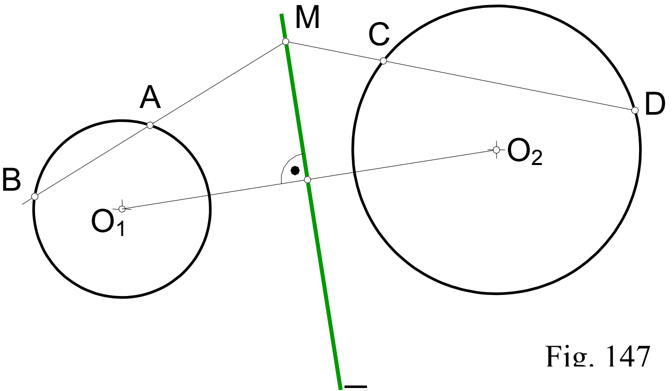


Fig. 147

a) Eje radical de dos circunferencias tangentes. Fig. 148.

El eje radical de dos circunferencias tangentes se halla trazando la recta tangente común a ambas circunferencias.

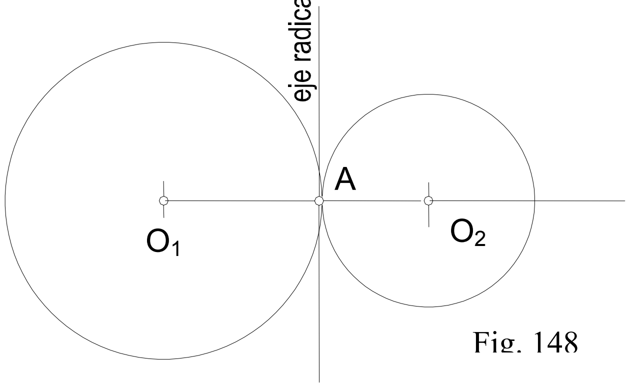


Fig. 148

c) El eje radical de dos circunferencias secantes. Fig.149

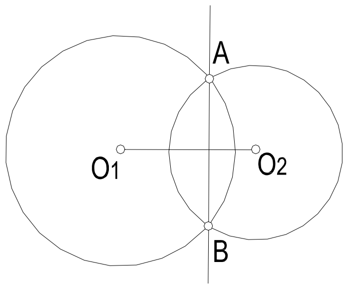


Fig. 149

El eje radical de dos circunferencias secante se halla uniendo los puntos de intersección de ambas circunferencias ***A*** y ***B***,

d) Eje radical de dos circunferencias exteriores. Fig. 150.

Trazamos una circunferencia auxiliar cualquiera de centro **O**.

Hallamos los ejes radicales ***s*** y ***t*** de dicha circunferencia con las otras dos.

Donde se cortan ambos ejes radicales, será un punto que tiene la misma potencia con respecto a ambas circunferencias. Trazando

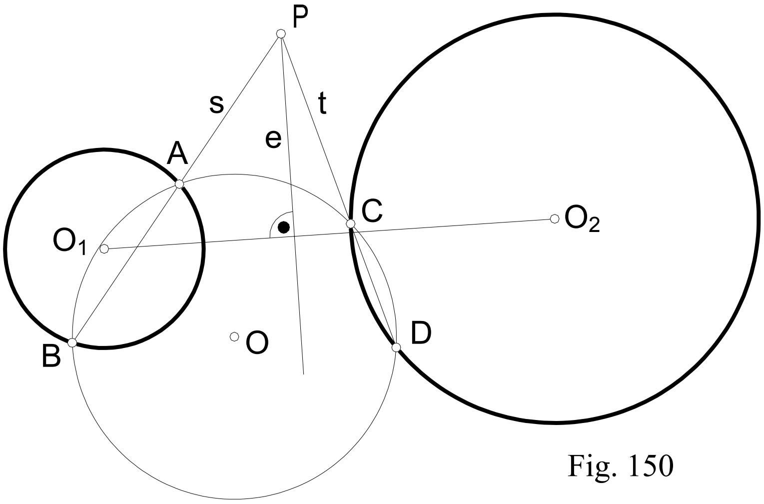


Fig. 150

una perpendicular por este punto a la recta de unión de los centros tendremos la solución.

21.2. Centro radical

Se llama centro radical de tres circunferencias, cuyos centros no están alineados, al punto que tiene la misma potencia con respecto a ellas.

Sean tres circunferencias de centros ***O1, O2 y O3.***

Trazamos una circunferencia auxiliar de centro **O**.
Se hallan los ejes radicales ***r, s. t***, de dicha circunferencia con respecto a las otras tres, el punto de corte de ambas, será el centro radical. Fig. 151.

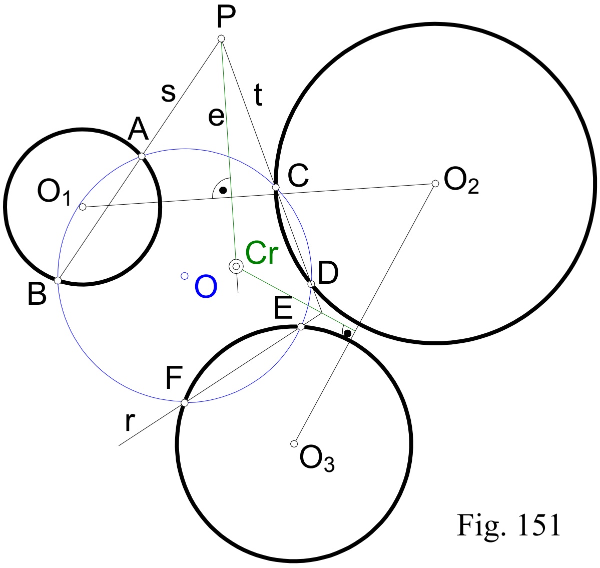


Fig. 151

d) Eje radical de dos circunferencias interiores. Fig. 152.

Sean las circunferencias interiores de centros ***O_1*** y ***O_2***

Trazamos una circunferencia auxiliar de centro ***O***.

Hallamos el eje radical entre la circunferencia auxiliar y la de centro ***O***, recta ***ab***.

Repetimos la operación con la de dentro ***O_2***, recta ***cd***.

El punto donde se cortan ambas rectas tendrá la misma potencia con respecto a las dos circunferencias.

Una perpendicular a la recta que une los centros ***O_1*** y ***O_2*** nos dará la solución.

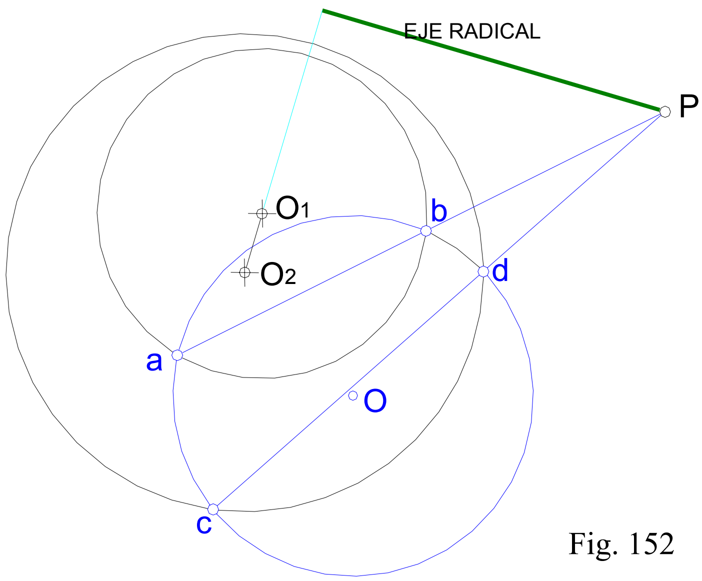


Fig. 152

Si dibujamos las rectas comunes a dos ***C_1*** y ***C_2*** circunferencias podemos observar que el eje radical pasa por su punto medio del segmento ***t_1*** y ***t_2***.. Fig. 153.

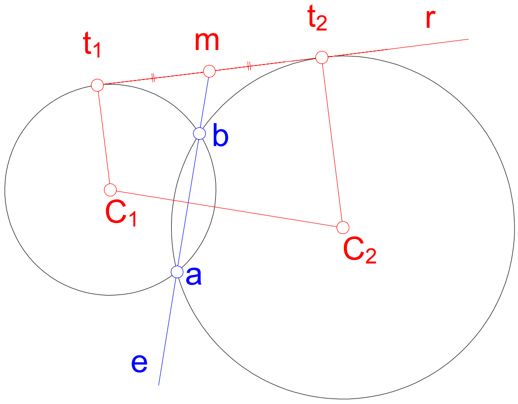


Fig. 153

QUINTA UNIDAD. Transformaciones Geométricas.

Contenido:
Homología
Rectas límite
Afinidad

22) Homología

22.1. Introducción

Se dice que el punto ***A,*** es homólogo del punto ***A',*** cuando se cumplen las siguientes condiciones: Fig. 154.

a) Que estén en línea recta con un punto fijo ***O***, llamado centro de homología.
b) Dos rectas ***r*** y ***r'*** son homólogas, cuando se cortan en un mismo punto del eje de homología.

Todos los puntos del eje de homología ***CC'***, son puntos dobles, al ser homólogos de si mismo.

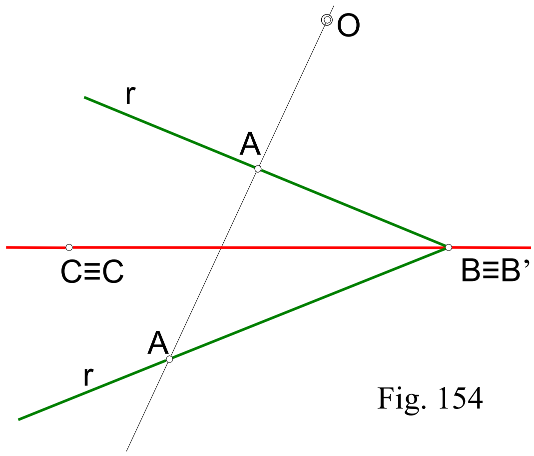


Fig. 154

a)Hallar el homólogo del punto 2, conociendo el Centro de homología O, un par de puntos Homólogos 3 y 3' y el eje de homología e. Fig. 155.

Unimos los puntos homólogos ***3*** y ***3',*** la recta ha de pasar por ***O***.

Unimos el centro de homología con el punto 2, recta ***t***.

Unimos el punto ***3*** con el ***2***, recta ***s***.

Hallamos la recta ***r***, homologa de ***s***, uniendo ***n*** con ***3',*** que corta a ***t*** en el punto Buscado.

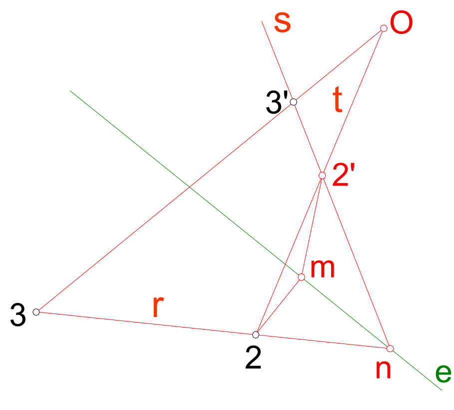


Fig. 155

22.2. Rectas límite

Lugar geométrico de los puntos cuyos homólogos del infinito. Serán dos y la representamos por ***li*** y ***li'***.

Para hallar las rectas límite procedemos de la forma siguiente:

Partimos de dos rectas homólogas ***s*** y ***s’***, del centro de homología ***O*** y del eje ***e***. Fig. 156.

Trazamos una paralela a la recta ***s’*** por el centro de de homología hasta que corte a la recta ***s*** en el punto ***m.***

Por ***m*** trazamos la paralela al eje de homología ***e***.

Repetimos la operación para la recta ***s.***

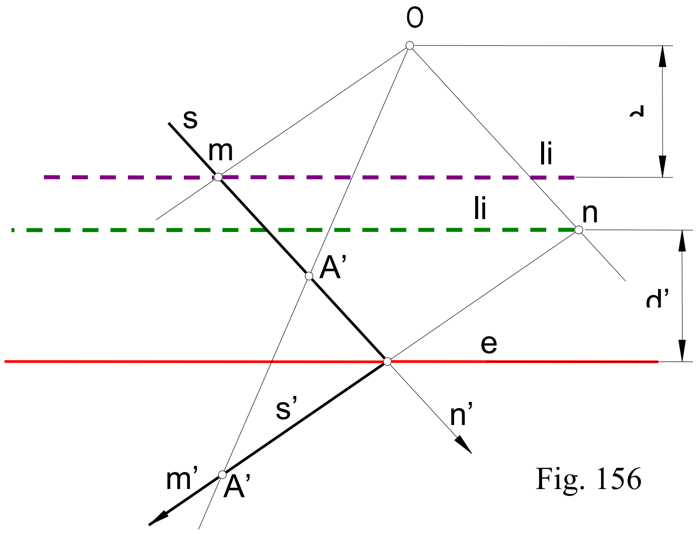


Fig. 156

Cuando dos rectas cualquiera se cortan en un mismo punto de la recta límite, sus homólogas son paralelas. Fig. 157.

Sean las rectas ***s*** y ***t,*** el centro de homología ***O***, la y el eje de homología ***e***.

Trazamos la recta ***mO.***

Las rectas homólogas serán ***s’*** y ***t’,*** paralelas a la dirección ***mO.***

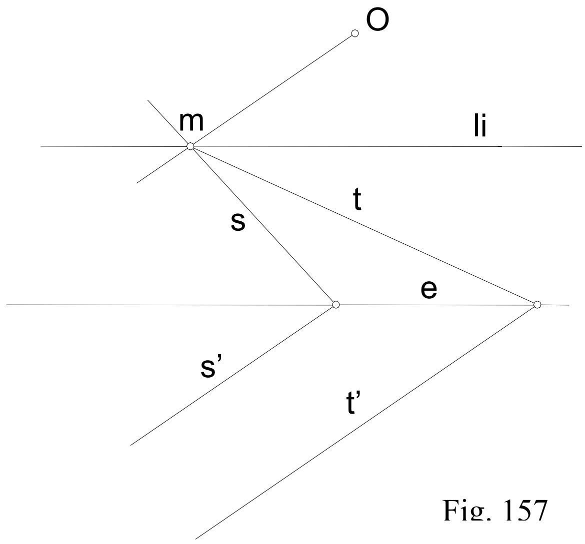


Fig. 157

Dos figuras situadas en un mismo plano son homológicas, cuando se corresponden punto a punto y recta a recta, de tal formas que las rectas que unen pares de puntos homólogos se cortan en un punto dado, centro de homología y los pares de rectas homólogas se cortan en un mismo punto del eje de homología.

a)Dado el eje de homología e, recta límite li, centro de homología o y un polígono A, B, C, D. hallar la figura homóloga. Fig. 158

Prologamos los lados ***AB*** y ***CD***, hasta que corten a la recta límite en ***m*** y al eje de homología en ***RS***.

Unimos ***m*** con ***O***, y por los puntos ***R*** y ***S***, trazamos dos paralelas a dicha

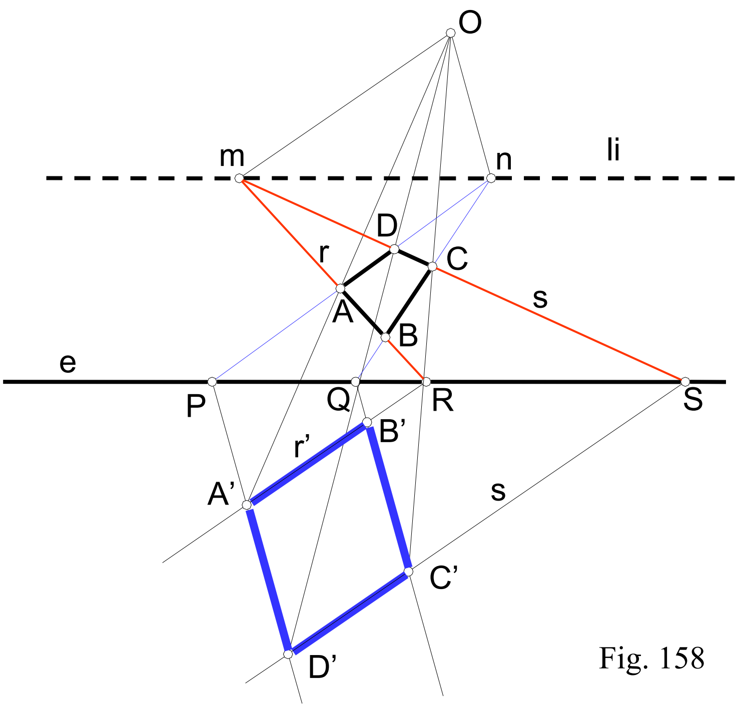


Fig. 158

recta.

Prolongamos los lados ***AD*** y ***CB***, hasta que corten a la recta límite en ***n*** y al eje en ***PQ***.

Unimos ***n*** con ***O***, y por los puntos ***P*** y ***Q***, trazamos dos rectas paralelas a dicha dirección.

La figura homóloga quedará determina por los puntos ***A', B', C', D'***.

23) Afinidad

La afinidad es una transformación geométrica, en el que el centro de afinidad se encuentre en el infinito. Fig. 159.

En toda afinidad debe de cumplirse:

1. Toda recta que une dos puntos afines ***AA'***, son paralelas a la dirección de afinidad.

2. Dos rectas afines ***r*** y ***r'***, y se cortan en un mismo punto del eje de afinidad ***CC'***, siendo este un punto doble.

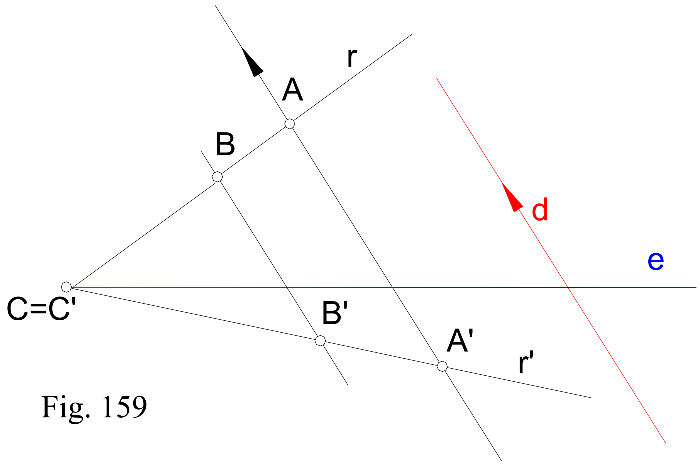


Fig. 159

a) Dado el hexágono a ,b ,c, d, e ,f, el punto homólogo de O y el eje de homología e. Hallar la figura afín. Fig. 160.

Unimos ***O*** con ***O'*** para hallar la dirección de afinidad ***d***.

Trazamos por los vértices del polígono, paralelas a dicha dirección.

Hallamos la recta ***r*** y su afín ***r'***, obteniendo los puntos ***A'*** y ***D'***.

Prolongamos el lado, ***AF***, recta ***s***, hasta que corte al eje ***e***, uniendo este punto con ***A'***.

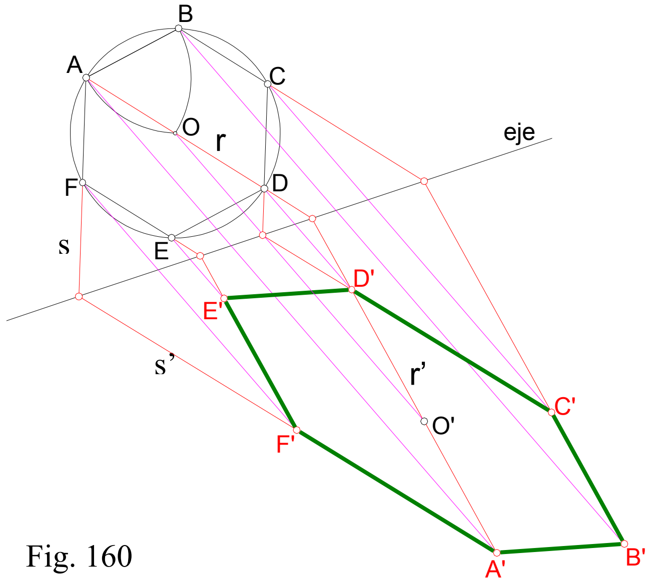


Fig. 160

SEPTA UNIDAD. Tangencias, enlaces, óvalos y ovoides.

Contenido:
Generalidades
Lugares geométricos
Tangencias
Enlaces
Óvalos, ovoides, espirales.

24) Tangencias.

24.1. Generalidades

Se dice que una recta o circunferencia son tangentes a otra circunferencia, cuando la recta o la circunferencia se cortan en un solo punto. Si la recta o la circunferencia se cortan en dos puntos, se dice que son secantes. Si no la corta en ningún punto será exterior.

Los problemas que se pueden presentar, los podemos agrupar de la forma siguiente:

a) Rectas tangentes a circunferencias
b) Circunferencias tangentes a rectas
c) Circunferencias tangentes a circunferencias.
d) Circunferencias tangentes a rectas y circunferencias.

En todos los casos debemos de tener en cuenta el número de datos precisos para obtener la solución.

Cuando la solución sea un circunferencia, necesitaremos tres datos. Cuando sea una recta, serán dos.

Una condición puede suplir a un dato. El número de soluciones puede oscilar entre cero y ocho.

Los procedimientos a utilizar en este primer curso, serán principalmente lugares geométricos, dilataciones y potencia.

24.2. Nomenclatura

La nomenclatura que se utilizará para numerar los distintos elementos que intervienen en los problemas de tangencias será la siguiente: Circunferencia ***O***. Puntos de tangencia en la recta ***T***. Punto de tangencia en la circunferencia ***t***. Un punto cualquiera ***P***. radio de la circunferencia ***r***.

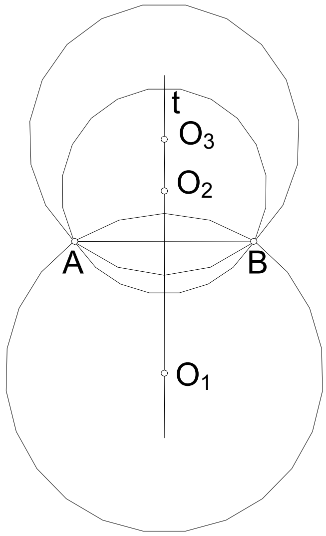


Fig. 161

24.3. Lugares Geométricos.

Dada la importancia que presentan los lugares geométricos en la resolución de los problemas de tangencias, se van a describir todos aquellos que utilizaremos a lo largo de los ejercicios que veremos seguidamente.

Número uno. La mediatriz del segmento ***AB,*** será el lugar geométrico de todos los centros de las circunferencias que pasan por los puntos ***A*** y ***B. Fig. 161.***

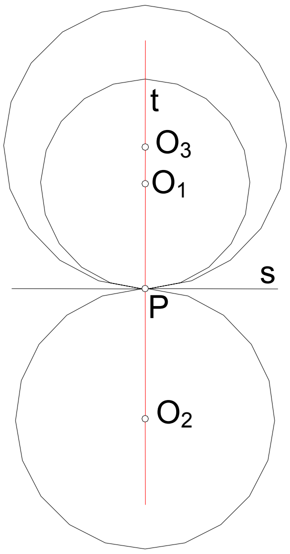


Fig. 162

Número dos: El lugar geométrico de todos los centros de las circunferencias tangentes a una recta ***s*** en un punto ***P*** de ella, es otra recta ***t*** perpendicular a ella en ese punto. Fig. 162.

Número tres: El lugar geométrico de todos los centros de circunferencias ***O*** de igual radio ***r*** se encuentra en las rectas ***t*** y ***s***, paralelas a la misma a la distancia ***r. Fig. 163.***

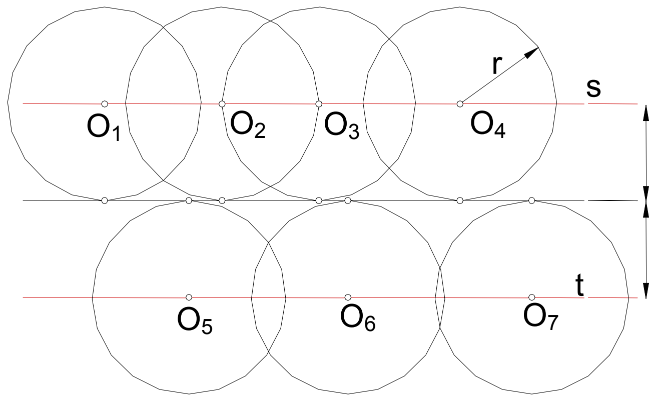


Fig. 163

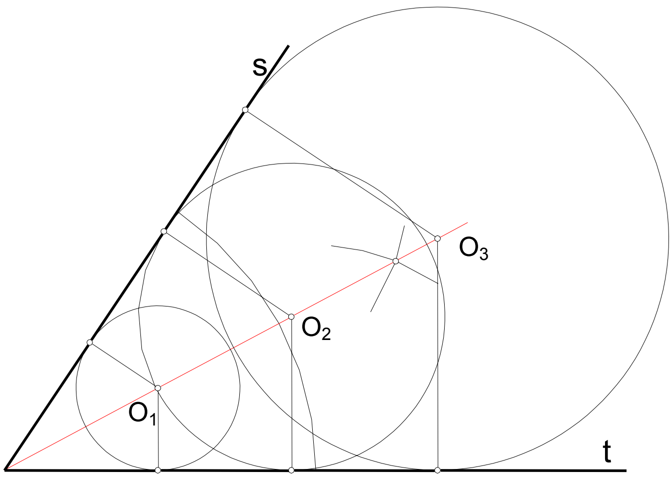


Fig. 164

Número cuatro. El lugar geométrico de todos los centros de las Circunferencias que son tangentes a dos rectas que se cortan ***s*** y ***t*** se encuentra en la bisectriz de las mismas. Fig. 164.

Número cinco. El lugar geométrico de Todos los centros de las circunferencias de radio ***r*** que pasan por un punto ***Q***, se encuentra en una circunferencia de centro ***O*** y de igual radio **r**. Fig. 165.

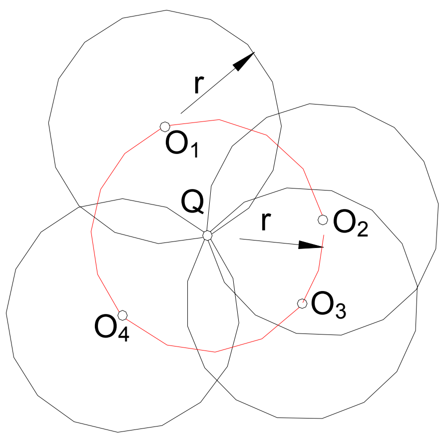


Fig. 165

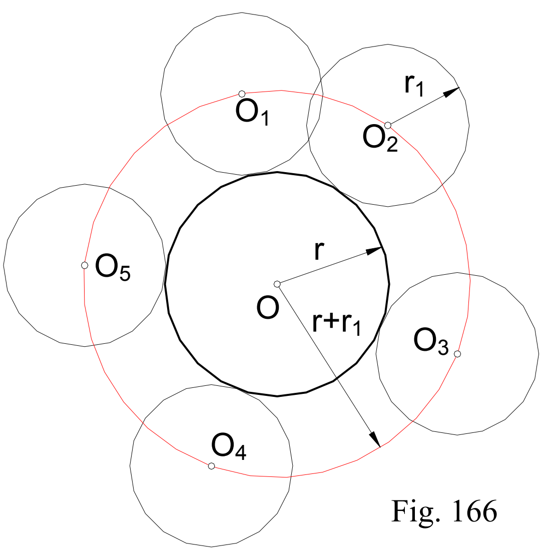


Fig. 166

Número seis. El lugar geométrico de todos los centros de circunferencia de radio ***r1*** es otra circunferencia concéntrica con la primera cuyo radio es la suma de los radios. ***r + r1***. Fig. 166.

Número siete: El lugar geométrico de todos los centros de circunferencias tangentes a otra circunferencias, en un punto de ella, se encuentra en la recta que une el punto de tangencia con el centro de la circunferencia. Fig. 167.

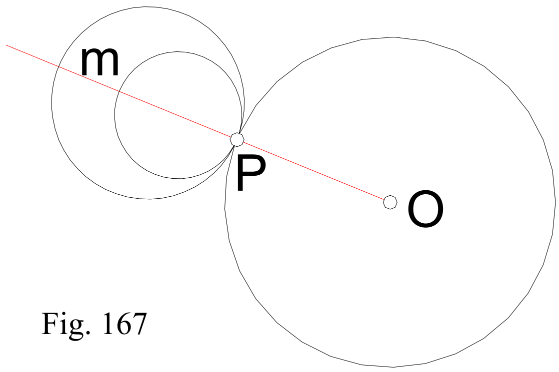


Fig. 167

24.4. Circunferencias tangentes a una recta

a) Circunferencias tangentes a una recta, en un punto de ella y que pasen por un punto exterior. Fig. 168.

Lo resolveremos por lugares geométricos, aplicando el número uno y el número tres.

Sea la recta r y un punto cualquiera P, exterior a ella.

Tendremos presente que el lugar geométrico de todos las circunferencias que pasan por ***P*** y ***Q*** estará en la mediatriz del segmento ***PQ***.

El centro de la circunferencia tangente a una recta en un punto de ella, se encuentra en la perpendicular trazada a la misma por dicho punto.

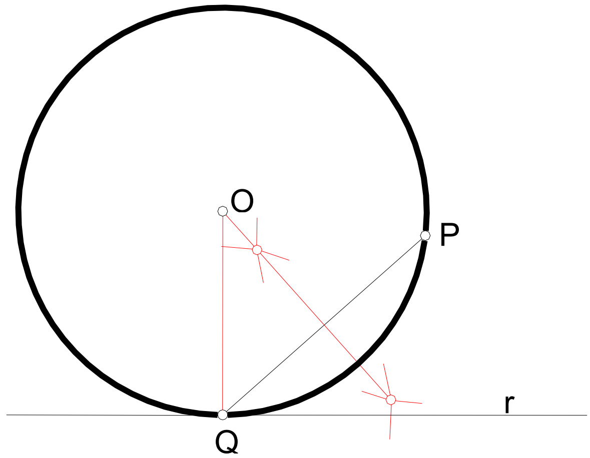


Fig. 168

E
l

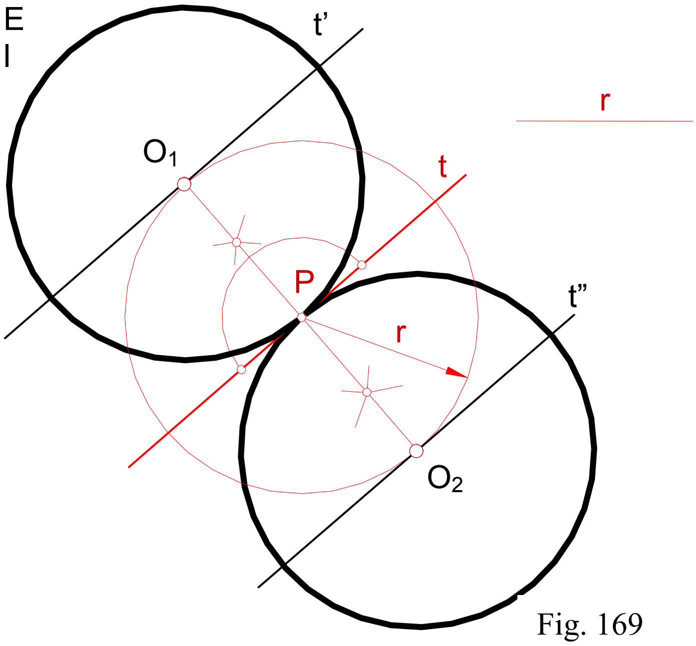


Fig. 169

centro buscado será, por tanto donde se encuentren ambas rectas.

b) Circunferencias tangentes a una recta t en un punto de ella P conocido el radio de la solución r. Fig. 169.

Lo resolveremos por lugares geométricos.

Sea la recta ***t*** y un punto cualquiera en la recta ***P***, el radio de la solución será ***r***.

La circunferencia que pase por el punto **P**, estará en la perpendicular a la recta **t**.

Todas las circunferencias de radio ***r*** tangentes a la recta ***t***, se encontrarán en una paralela a dicha distancia.

Donde se cortan las rectas paralelas ***t'- t"*** y la perpendicular tendremos los centros que se buscan ***O1*** y ***O2***.

24.5. Circunferencias tangentes a dos rectas

a) Circunferencias tangente a dos rectas conocido el punto de tangencia en un de ellas. Fig. 170.

Aplicaremos el lugar geométrico número ***4*** y ***2***.

Sean las rectas **s**, **t** y el punto de tangencia **P.**

El centro que buscamos estará en recta la bisectriz de los ángulos que forman las rectas **s** y **t**.

Trazaremos una perpendicular ***m*** a la recta ***s*** en el punto ***P***.

Donde se encuentren ambas rectas, tendremos los centros ***O1*** y ***O2***.

Los puntos de tangencia ***T1*** y ***T2***, se hallan, trazando perpendiculares ***a*** y ***b*** por ***O1*** y ***O2*** a la recta ***t***.

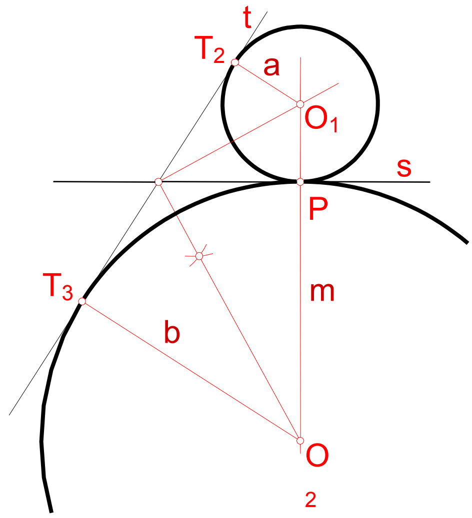


Fig. 170

b) Circunferencias tangente a dos rectas conocido el radio de la solución. Fig. 171.

Haremos uso del lugar geométrico número tres, que dice: todos los centros de circunferencias de igual radio ***r*** se encuentra en las rectas ***s1 y t1***, paralelas a la misma y a la distancia ***r.***

Sean las rectas ***s***, ***t*** y el radio de la solución ***r***.

Trazamos dos rectas paralelas a ***s*** y ***t*** a la distancia ***r***, rectas ***s1***, ***s'1*** y ***t1***, ***t'1***.

El punto donde se corten dichas rectas, nos determinarán los centros de las soluciones ***O1***, ***O2***, ***O3***, ***O4***.

Los puntos de tangencia se hallarán trazando rectas perpendiculares a ***s*** y ***t***, por los centros anteriores.

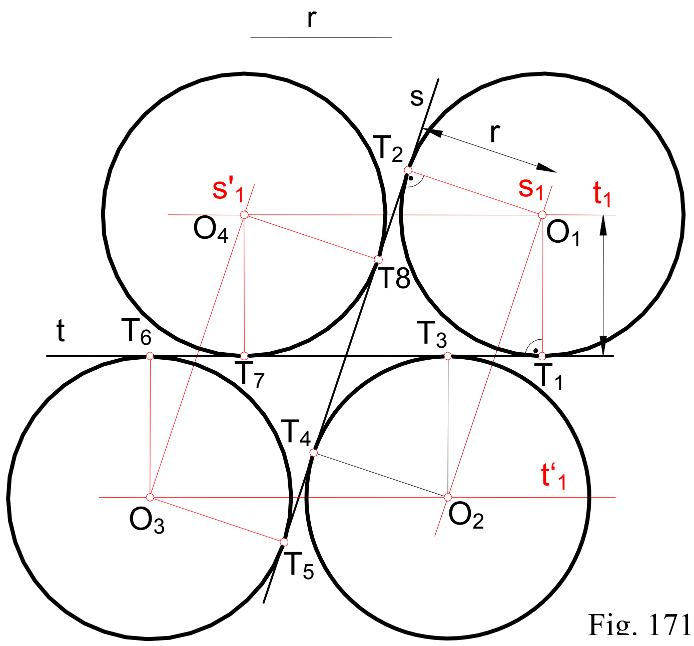


Fig. 171

Como puede observarse este ejercicio tiene cuatro soluciones.

24.6. Rectas tangentes a circunferencias

a) Rectas tangentes a una circunferencia en un punto de ella. Fig. 172.

Sea la circunferencia de centro ***O*** y un punto ***P*** en ella.

La tangente será perpendicular a la recta que une ***P*** con ***O***.

Unimos el punto ***P*** con el centro de la circunferencia ***O***, recta ***m***.

Trazamos una perpendicular por ***P*** a ***m***.

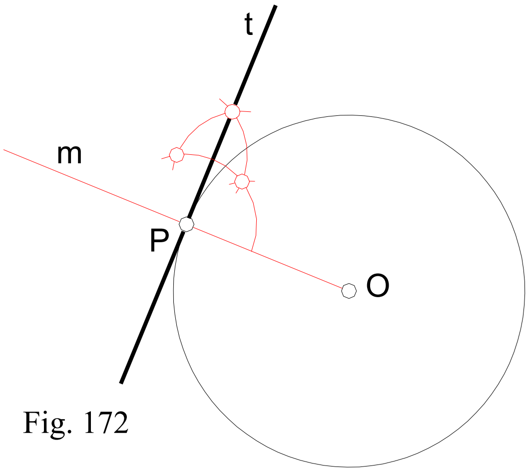


Fig. 172

b) Rectas tangentes a una circunferencia paralela a una dirección dada. Fig. 173.

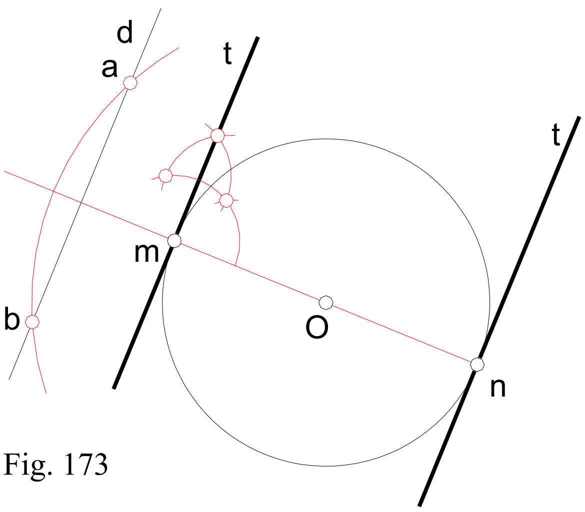


Fig. 173

Sea la circunferencia de centro ***O*** y la dirección ***d***

Haciendo centro en ***O***, trazamos una circunferencia que corte a ***d*** en los puntos ***a*** y ***b***.

Hallamos la mediatriz de ***ab***, que corta a la circunferencia ***O*** en los punto ***m*** y ***n***.

Las perpendiculares por ***m*** y ***n***, nos dará las soluciones.

c) Rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior

P.(primer procedimiento). Fig. 174.

Trazamos la mediatriz de ***PO_1***.

Con centro en m trazamos la circunferencia que pase por ***P O_1.***

T_1 y ***T_2*** serán los puntos de tangencia buscados.

El triángulo ***PT_1O*** y ***PT_2O***, son rectángulos, ya que están inscritos en una circunferencia de centro ***O***, y las rectas ***t_1*** y ***t_2*** son tangentes a la circunferencia de centro ***O***, al ser perpendicular a la cuerda ***T_1O***.

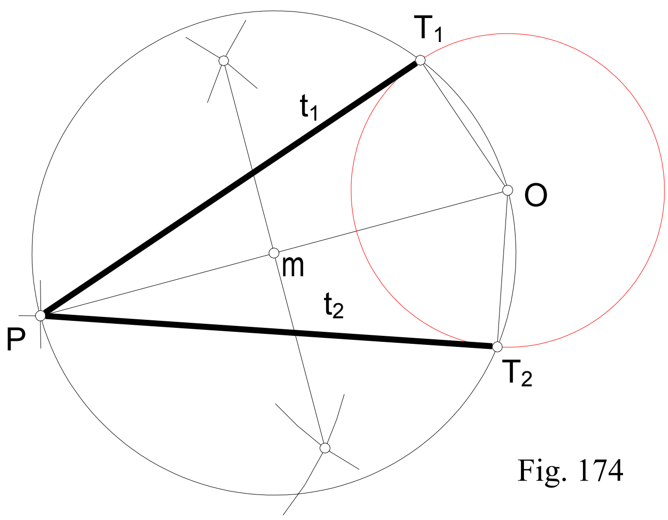


Fig. 174

c) Rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior P.(segundo procedimiento). Fig. 175.

Trazaremos una circunferencia de radio ***2r***, concéntrica con ***O***.

Haciendo centro en ***P*** trazamos una circunferencia de radio ***PO.***

Ambas se cortan en los punto ***a*** y ***b***. Los unimos con ***O*** y quedan determinados los puntos de tangencia T_1 y T_2.

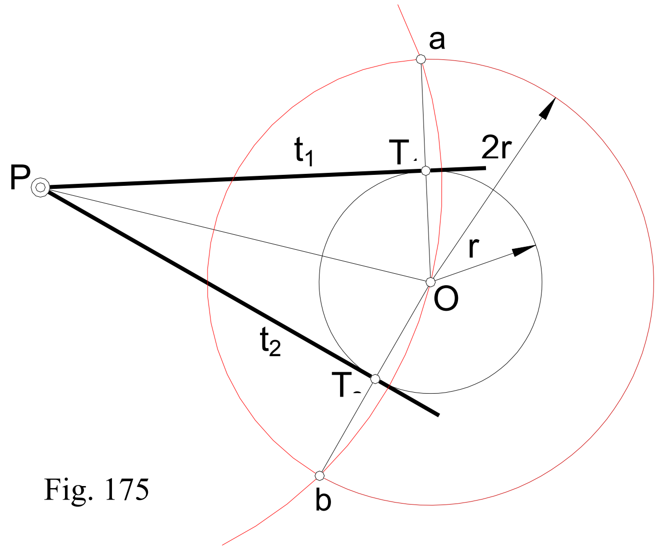


Fig. 175

d) Rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior P.(tercer procedimiento). Fig. 176.

Con centro en ***O***, se traza una circunferencia que pase por ***P***.

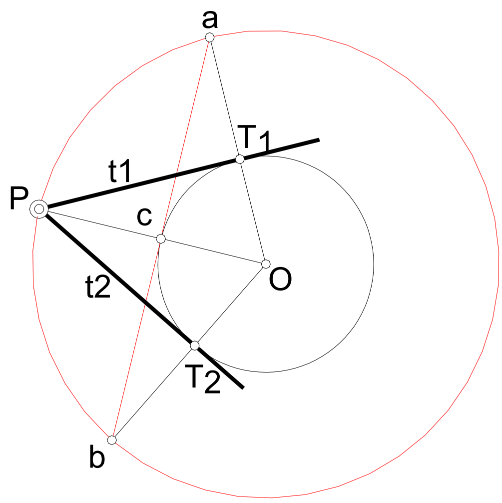


Fig. 176

Por ***c*** se traza una perpendicular a la recta ***PO***. Esta determina los puntos ***a*** y ***b***.

La unión de ***aO*** y ***bO***, nos dan los puntos de tangencia

e) Rectas tangentes exteriores a dos circunferencias: Fig. 177.

Este ejercicio se resuelve por dilataciones,

Transformándolo en el anterior.

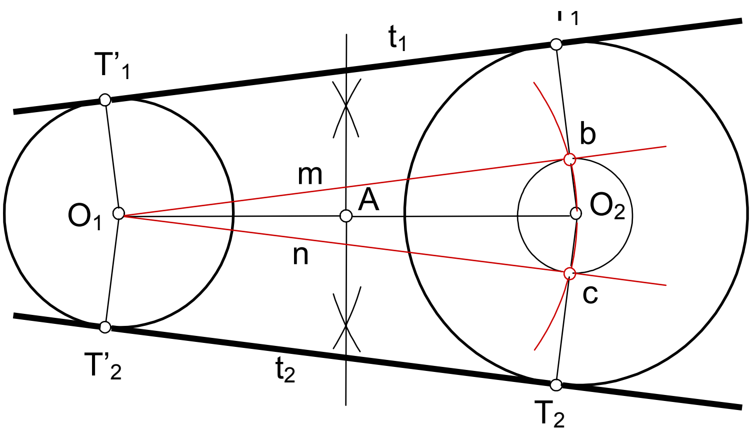


Fig. 177

Se le resta a la circunferencia pequeña y a la grande el radio de la menor, convirtiendo esta en un punto.

Trazamos por el procedimiento anterior la tangente desde el punto O_1, a la circunferencia $r_2 - r_1$. rectas ***m*** y ***n***.

Unimos O_2 con ***B*** y con ***C***, que nos determinan los puntos de tangencia T_1 y T_2.

Por O_1 trazamos dos paralelas a ***B*** T_1 y ***C*** T_2, resultando los puntos T'_1 y T'_2. La unión de T'_1 y T_1 determinan la tangente ***r*** y T'_2 y T_2 la tangente ***s***.

f) Rectas tangentes exteriores a dos circunferencias: (procedimiento de homotecia). Fig. 178.

Elegimos un punto cualquiera en una de las circunferencias, por ejemplo el punto ***a***.

Unimos ***a*** con ***O_1*** y trazamos por ***O_2*** un diámetro paralelo, que serán homotéticos.

Hallamos el centro de homotecia positiva ***O***, prolongado la recta ***a-b***, hasta que corte a la prolongación de ***O_1-O_2***.

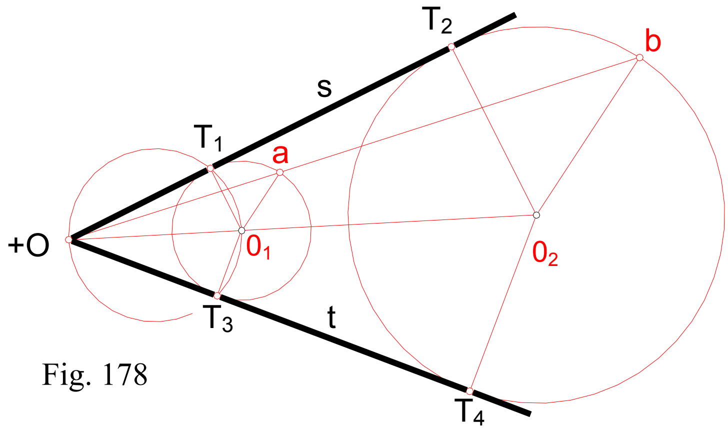


Fig. 178

Trazamos por ***O*** una recta tangente a la circunferencia ***O_1***, que por la propiedad de la homología lo será también a ***O_2***.

g) Rectas tangentes exteriores a dos circunferencias: (procedimiento de potencia). Fig. 179.

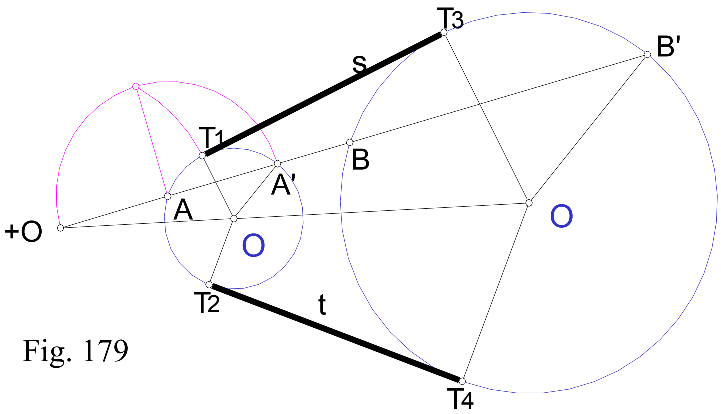


Fig. 179

El punto de tangencia se podía haber resuelto aplicando la potencia del punto ***O*** con respecto a una de las circunferencias ***OAA'*** o ***OBB'***

Como se ha visto en capítulos anteriores:

$$O\,A * O\,A' = P\,T_1 * P\,T'_1 = P\,T_1^2$$

Por ello la media proporcional entre los segmentos ***OA*** y ***OA'***, nos dará la solución.

h) Rectas tangentes interiores a dos circunferencias de centro O_1 y O_2. Fig. 180

El ejercicio se resolverá por dilataciones.

Con centro en ***O_2*** trazaremos una circunferencia concéntrica cuyo radio sea la suma de los

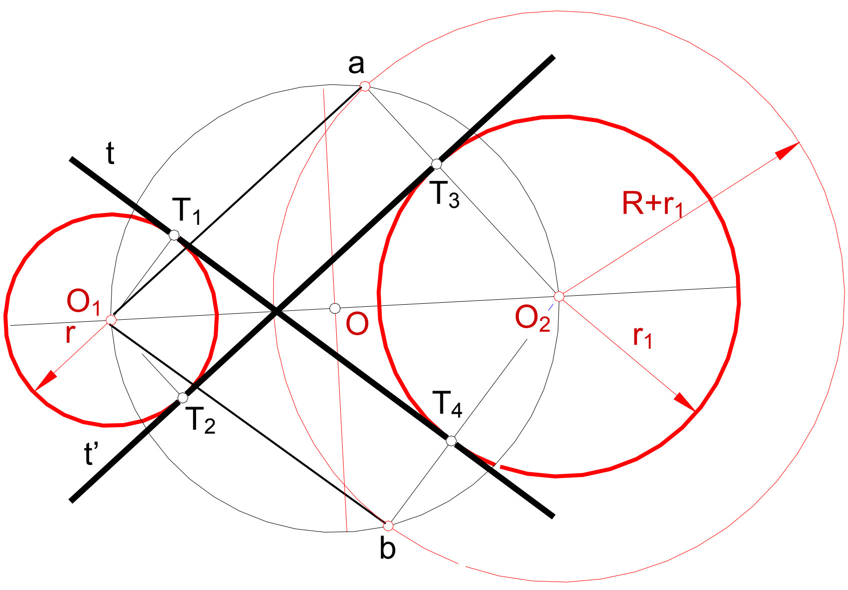


Fig. 180

radios **($r + r_1$).**

Trazaremos la mediatriz del segmento ***O_1-O_2*** y seguidamente la circunferencia que pase por esos puntos.

Unimos el centro ***O_2*** con los puntos ***a*** y ***b***, que nos determinan los puntos de tangencia ***T_3***, ***T_4***.

Por ***O_1***, trazamos una paralela a la recta ***O_2-T_4***. punto de tangencia ***T_1***.

Por ***O_1*** trazamos una recta paralela a ***O_2-T_3***. punto de tangencia ***T_2***.

24.7. Circunferencias tangentes a circunferencias

a) Circunferencias tangentes a una circunferencia en un punto P de ella, dado el radio de la solución r. Fig. 181.

Se unen los puntos ***O*** y ***P.***

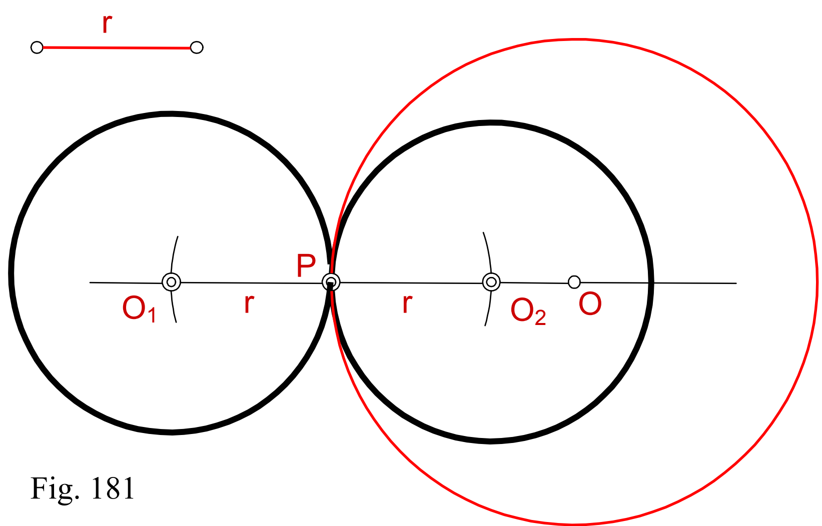


Fig. 181

Sobre la recta ***O, P*** se traslada el radio ***r. O_1*** y ***O_2*** son los centros de las circunferencias solución.

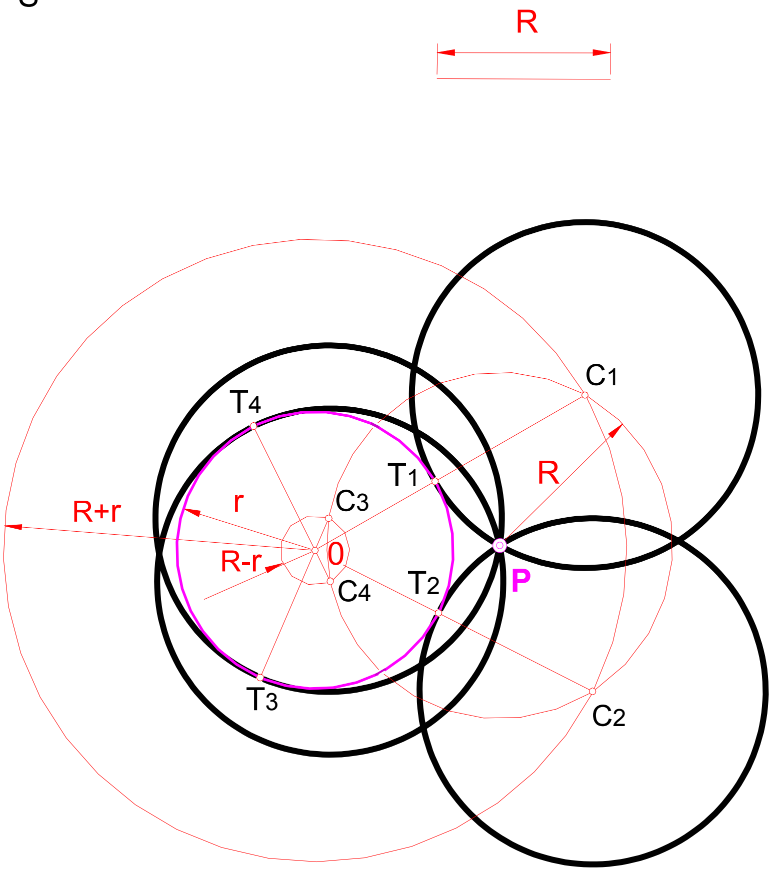


Fig. 182

b) Circunferencias tangentes a una circunferencia que pasen por un punto "P", dado el radio de la solución. Fig. 182.

Sea la circunferencia de centro ***O*** y el punto ***P***.

Lo resolveremos por lugares geométricos

El número 6 dice: El lugar geométrico de todos los centros de circunferencia de radio ***R*** es otra circunferencia concéntrica con la primera cuyo radio es la suma y recta de los radios. ***R + r***.

De acuerdo con ello, con centro en ***O*** se dibujan las circunferencias de radio ***R + r*** y ***R – r***.

Aplicamos el número 5*:* El lugar geométrico de Todos los centros de las circunferencias de radio ***R*** que pasan por un punto ***P***, se encuentra en una circunferencia de centro ***P*** y de igual radio **R**.

Con centro en ***P*** se dibuja la circunferencia de radio ***R***.

Donde se corten todas las circunferencias todas las auxiliares tendremos los centros C_1, C_2, C_3, C_4, las soluciones.

Seguidamente tendremos que hallar los puntos de tangencia T_1, T_2, T_3, T_4.

Para ello uniremos C_1 con ***O***, obteniendo T_1.

C_3 con ***O***, obteniendo T_3. Y así sucesivamente.

c) Circunferencias tangentes a dos circunferencias C_1 y C_2, conocido el punto de tangencia en una de ellas. Fig. 183.

Resolveremos el ejercicio por dilataciones y lugares geométricos reduciendo la circunferencia de centro C_2 a un punto y la otra la dilatamos con el valor de su radio radio.

Sean las circunferencias de centros O_1 y O_2 y un punto ***T*** en la de centro O_1.

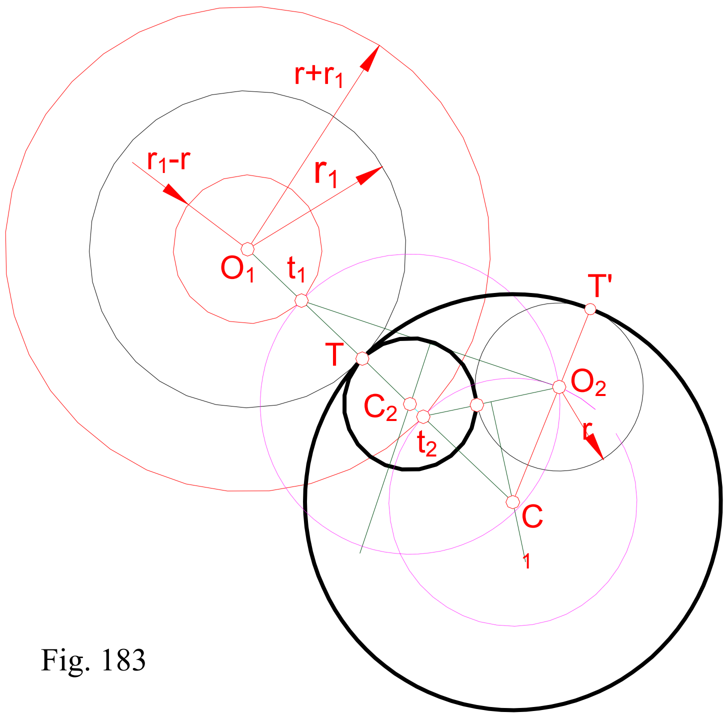


Fig. 183

El centro que buscamos deberá estar situado en la recta que une el centro O_1 con el punto de tangencia ***T***. (***L.G. nº 7***)

Trazamos dos circunferencias concéntricas con O_1, de radio de $r + r_1$ y $r_1 - r$. (***L.G. nº 6***)

Unimos el punto de tangencia ***T*** con el centro O_1 , recta ***m***, esta nos determinan los puntos t_1 y t_2 . ***L.G. nº 7.***

Ahora se trata de hacer pasar una circunferencia por los puntos ***t1*** y ***t2***, (***L.G. nº 1***) para ello los unimos con ***O_2***, y seguidamente hallamos la mediatriz de ***t1-O_2*** y de ***t2 O_2***.

Donde la mediatrices cortan a la recta ***m*** tendremos los centros que buscamos ***C_1 y C_2***.

El ejercicio finaliza Hallando el punto de tangencia ***T'*** y ***T''*** y deshaciendo la dilatación.

d) Circunferencias tangentes a dos circunferencias conocido el radio de la solución R. Fig. 184.

Este ejercicio podrá tener desde cero soluciones hasta un máximo de ocho.

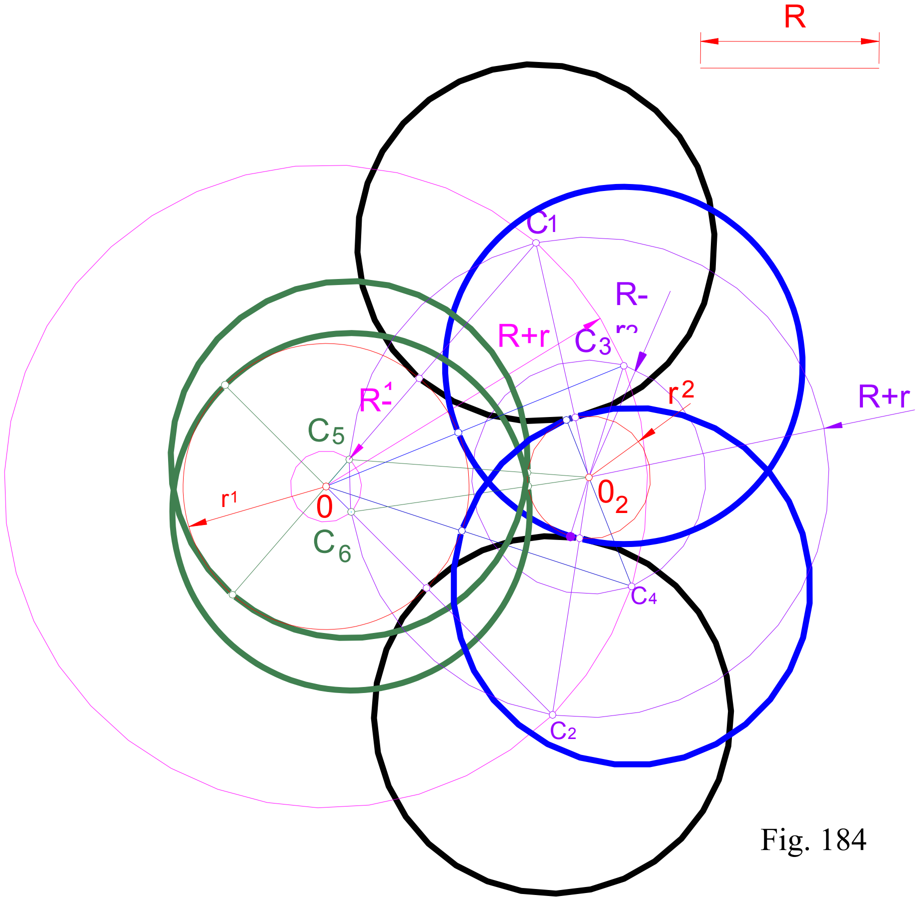


Fig. 184

Sean las circunferencias de radio ***r_1*** y ***r_2,*** siendo ***R*** el de la solución.

Aplicaremos el sexto lugar geométrico. Haciendo centro en ***O_1*** y con radios (***R + r_1***) y (***R-r_1***), trazamos dos circunferencias.

Con centro en ***O_2*** y con radios (***R + r_2***) y (***R-r_2***), trazamos otras dos circunferencias.

Los puntos donde las circunferencias anteriores se cortan serán los centros de las soluciones. ***C_1*** a ***C_6.***

Los puntos de tangencia se hallaran uniendo ***C_1*** con ***O_1*** y ***O_2.***

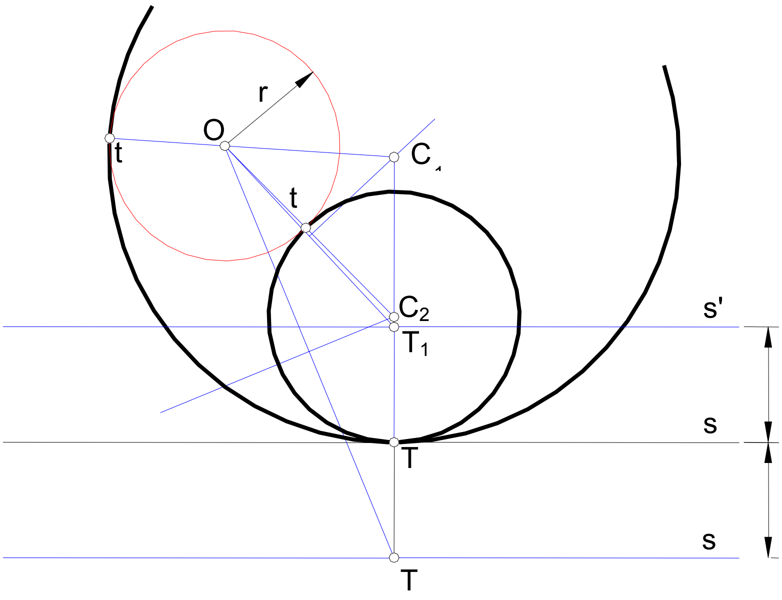


Fig. 185

24.8. Circunferencias tangentes a circunferencias y rectas.

a) Circunferencias tangentes a una circunferencias y a una recta conocido el punto de tangencia T en la recta. Fig. 185.

Podemos resolver el ejercicio por varios procedimientos. Aplicaremos el basado en las dilataciones.

Sea la circunferencia de centro ***O***, la recta ***s***, y un punto ***T*** en la misma.

A la circunferencia de centro ***O***, le restamos su propio radio ***r***, reduciéndose a un punto. Dicho radio lo sumamos a la recta ***s***, obteniendo las rectas ***s'*** y ***s".***

Trazamos una perpendicular por ***T***. El punto de tangencia, ocupará las posiciones T_1 y T_2.

El ejercicio se ha transformado en " *circunferencia tangente a una recta en un punto de ella y que pasa por un punto exterior".* Ejercicio visto con anterioridad.

Las circunferencias con centro en C_1 pasaran por ***O*** y T_1 . La de centro C_2 y T_2. Deshacemos las dilatación y Tendremos la solución, hallando previamente los puntos de tangencia t_1 y t_2.

b) Circunferencias tangentes a una circunferencias y a una recta conocido el punto de tangencia. Fig. 186

Sea la circunferencia de centro ***O***, la recta ***t*** y el punto de tangencia en la circunferencia ***T***.

Teniendo en cuenta el lugar geométrico que hemos numerado como siete, el centro que buscamos debe estar en la recta que une el punto de tangencia ***T*** con el centro ***O***.

Todas las circunferencias que pasen por ***T***, tendrán como radical la recta ***e***.
Todas las circunferencias tangentes a la recta ***t***, Tendrán como eje radical la propia recta ***t***. Por tanto ***Cr***, será el centro radical de todas las circunferencias que pasen por ***T*** y sean tangentes a la recta ***t***.

Bastará con llevar la distancia de ***Cr T***, sobre la recta ***t***, para obtener los puntos de tangencia T_1 y T_1. Una perpendicular a ***t***, nos determinará los centros C_1 y C_2.

Se podía haber resuelto el problema hallando la bisectriz de los ángulos ***α*** y ***β***.

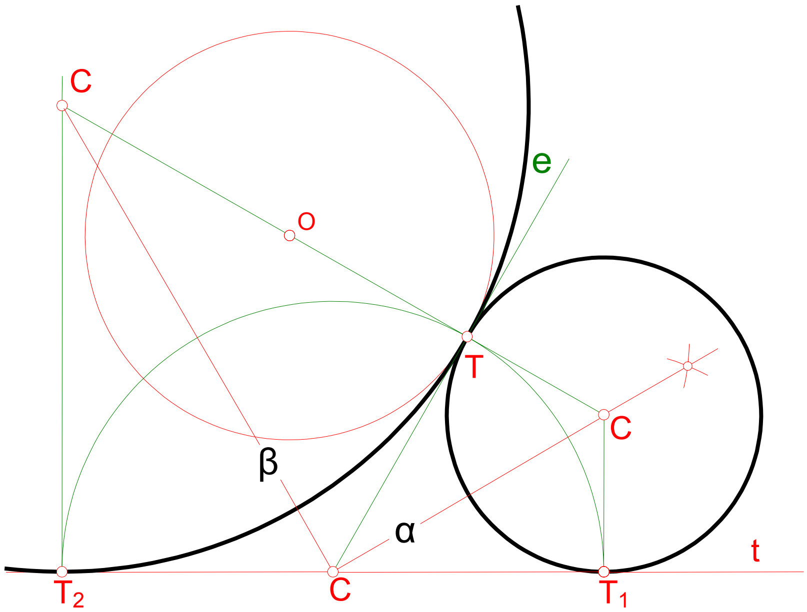


Fig. 186

c) Circunferencias tangentes a una circunferencia y a una recta s conocido el radio r de las soluciones. Fig. 187.

Resolveremos el problema por lugares geométricos.

Aplicaremos el lugar geométrico nº 6. Trazamos dos circunferencias concéntricas con la dada de valor suma y recta de ***R*** y ***r***.

Aplicamos el lugar geométrico nº 3.Trazamos dos rectas paralelas a la recta ***s*** dada, a la distancia de ***r***.

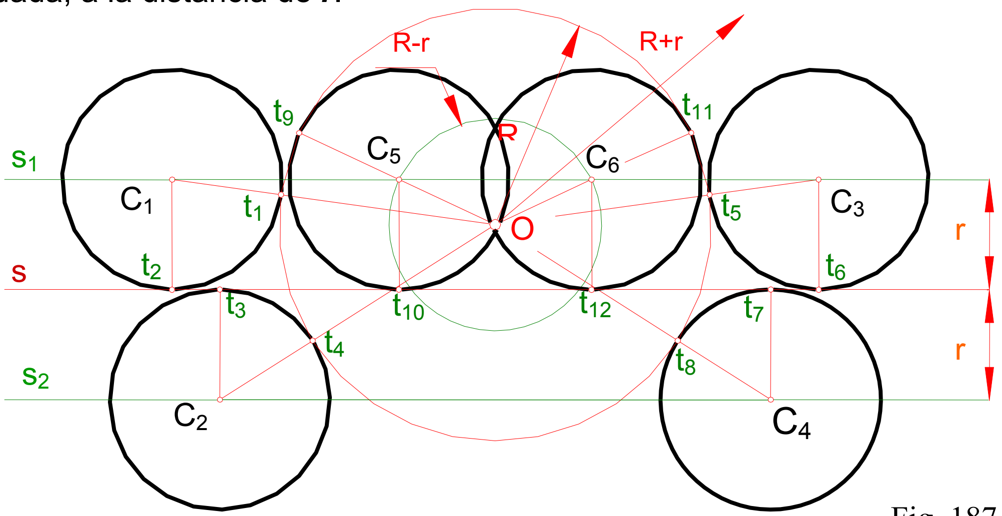


Fig. 187

Los puntos de intersección de las circunferencias auxiliares de radio ***R+r*** y ***R-r*** y las rectas ***s_1*** y ***s_2***, serán los centros de las seis soluciones.

Finalmente hallaremos los puntos de tangencia, uniendo ***C_1*** con ***O***, punto ***t_1*** y trazando por ***C_1*** una perpendicular a r, punto ***t_2.***

Haremos la misma operación con el resto de los centros.

D) Circunferencias tangentes a tres rectas. Fig. 188.

Sean las rectas ***r***, ***s, t***, al cortarse forman un triángulo, y ello nos reducirá el problema a trazar las circunferencias inscritas y esencritas a dicho triángulo.

Dibujamos las bisectrices de los ángulos de las rectas dadas y buscamos los puntos de Intersección ***C_1***, ***C_2***, ***C_3***, ***C_4***.

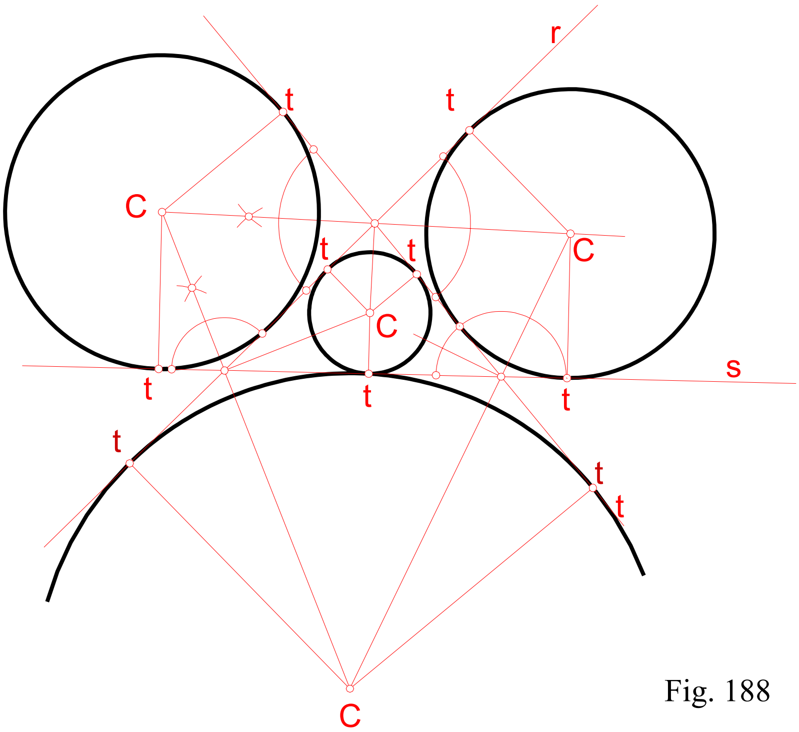


Fig. 188

Los puntos de tangencias se hallaran trazado por los centros ***C_1***, ***C_2***, ***C_3***, ***C_4.*** rectas perpendiculares a las dadas.

25) Enlaces

Se denomina enlace o empalme de dos líneas, a la continuidad en el trazado conseguida por medio de alguno de los procedimientos que se han visto con anterioridad. Se fundamentan exclusivamente en los casos de tagencias y su utilización tiene aplicación en los trazados industriales. Seguidamente se realizaran algunos de ellos.

a) Empalme de dos rectas paralelas dado el punto de arranque T en una de ellas.

Sean las rectas ***r*** y ***s***, y el punto de arranque ***T***. Fig. 189.

La perpendicular a dichas rectas en el punto ***T***, nos fijará en dentro de la solución.
Siendo ***O***, la mediatriz de dicho segmento.

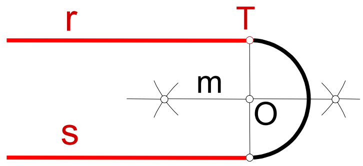


Fig. 189

b) Empalme de dos rectas concurrentes por un arco de radio R. Fig. 190.

Sean las rectas ***r*** y ***s***, y ***R*** el radio dado.

Las paralelas a ***r*** y ***s*** a la distancia ***R***, se cortarán en el punto ***C***, centro de la solución.

El punto de tangencia se hallará mediante las perpendiculares ***C***t_1 y ***C***t_2.

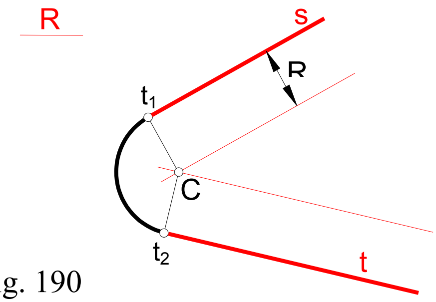


Fig. 190

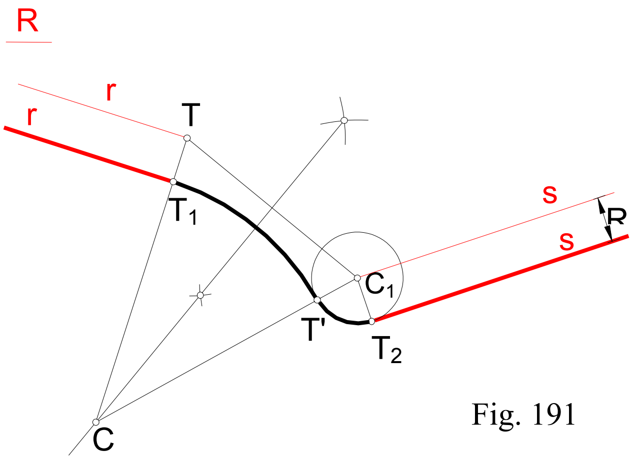


Fig. 191

c) Empalme de dos rectas incidentes por dos arcos de sentido contrarios conocidos los puntos de arranque T_1 y T_2 y el radio de r de una de ellas. Fig. 191.

Sean las rectas ***r*** y ***s***, el radio de la solución ***R*** y los punto de arranque ***T_1*** y ***T_2***.

Trazamos dos rectas ***r'*** y ***s'*** paralelas a ***r*** y ***s,*** a la distancia dada ***R***.

Trazamos la circunferencia de centro ***C_2*** y radio ***R*** El centro ***C_2***, estará en la perpendicular ***TT_1***, con la mediatriz de ***T C_1***.

D) Empalme de recta y circunferencia dado el punto de arranque en la recta. Fig. 192.

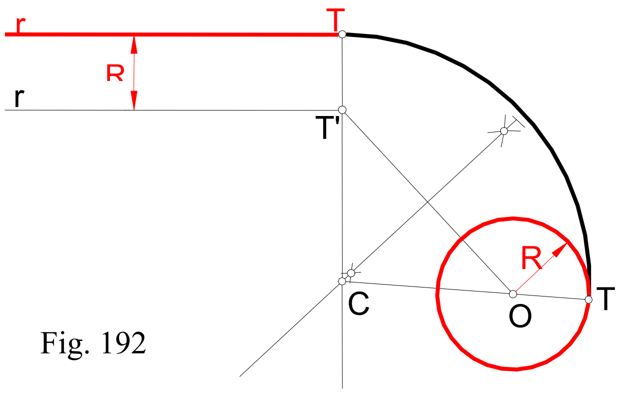


Fig. 192

Sea la recta ***r*** y la circunferencia de radio ***R***, siendo ***T*** el punto de arranque.

Trazamos una paralela ***r’*** a ***r*** a la distancia ***R.***

El centro **C_1** estará en la perpendicular ***TT’*** con la Mediatriz ***T’ O***.

26) Óvalos

El ovalo es una figura cerrada formada por arcos de circunferencia que tiene una gran semejanza con la elipse. Tiene dos ejes perpendiculares que se cortan en su punto medio. Su uso principal es la sustitución de las elipses en los trazados.

a) Óvalo de cuatro centros dado el eje menor CD. Fig. 193.

Trazamos la mediatriz del el eje menor.

Haciendo centro en ***O***, trazamos una circunferencia que tenga por diámetro el eje menor.

Los centros de los arcos serán los puntos **C_1, C_2**…

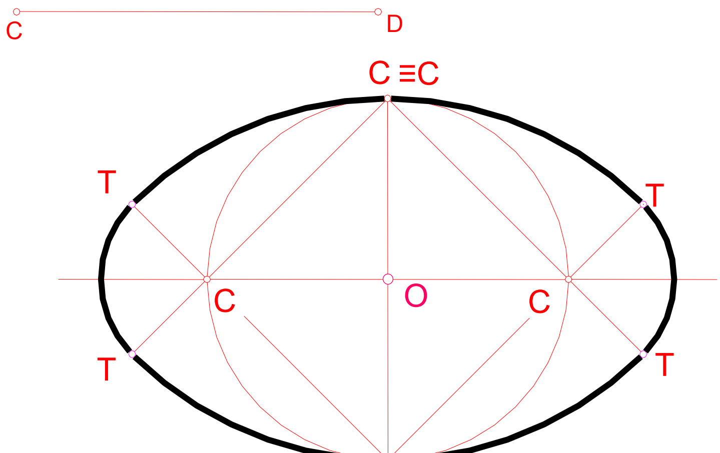


Fig. 193

b) Óvalo de cuatro centros dado el eje mayor AB.(primer procedimiento). Fig. 194.

Dividimos el eje mayor en tres partes iguales

Haciendo centro en **C_1** y **C_2**, trazamos dos Circunferencias de radio ***1/3*** de ***AB***.

Los centros serán los puntos **C_1, C_2**…

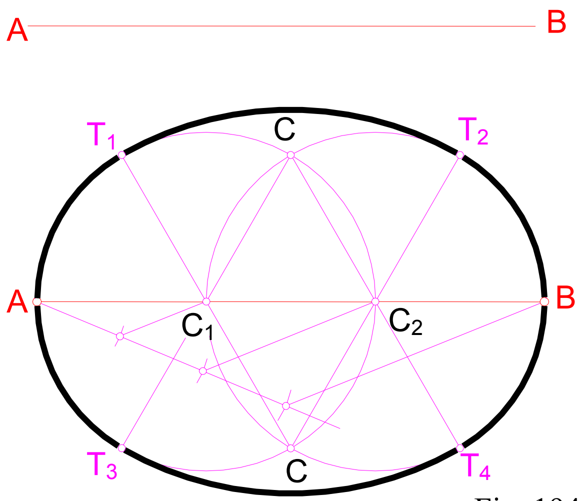


Fig. 194

c) Óvalo de cuatro centros dado el eje mayor (segundo procedimiento). Fig. 195.

Sea el eje mayor ***AB***.

Dividimos el eje ***AB*** en cuatro partes iguales, Obteniendo los centros **C_1** y **C_2**.

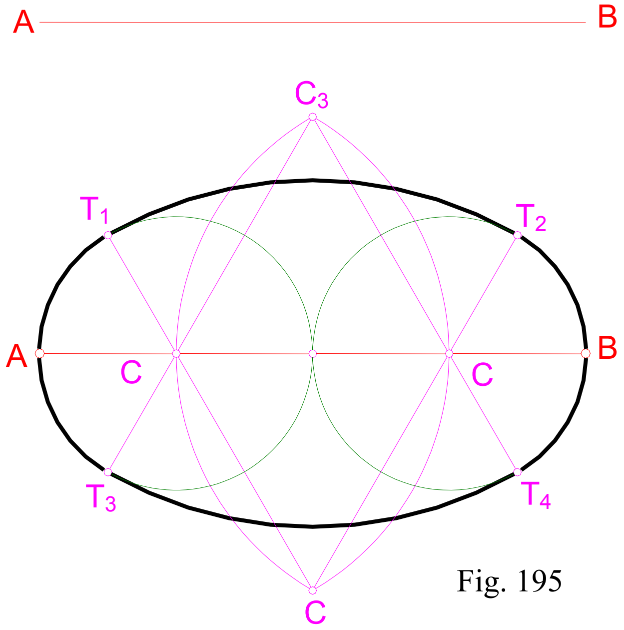


Fig. 195

Con centro en $\boldsymbol{C_1}$ y $\boldsymbol{C_2}$ y radio $\boldsymbol{C_1C_2= AB/2}$, Se trazan dos arcos que determinan los centros $\boldsymbol{C_3}$ y $\boldsymbol{C_4}$,

Los puntos de tangencia $\boldsymbol{T_1}$, $\boldsymbol{T_2}$…. se obtendrán uniendo los centros hallados.

Como puede observarse en ambas figuras, el óvalo tiene curvaturas diferentes, aun siendo el eje mayor de igual medida.

C) Óvalo de cuatro centros dados los dos ejes.(primer procedimiento). Fig. 196.

Esta construcción es de bastante interés en el dibujo industrial por suplir en bastantes ocasiones a la elipse.
Son varios los procedimientos para su construcción, aunque solo se citarán los más usados.

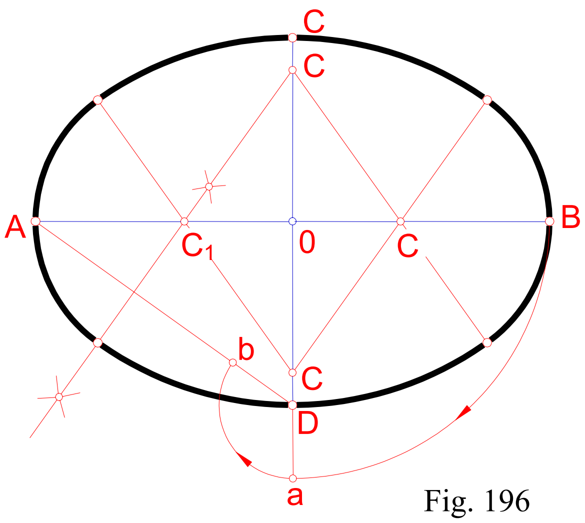


Fig. 196

Llevamos sobre la prolongación del eje menor, el valor del eje mayor. Punto ***a***.

Unimos D con A.

Haciendo centro en el extremo del eje menor, punto ***D***, trazamos un arco, punto ***b***.

Trazamos la mediatriz del segmento ***bA***.

Dicha mediatriz nos determina los centros $\boldsymbol{C_1}$ y $\boldsymbol{C_3}$. los otros dos serán simétricos.

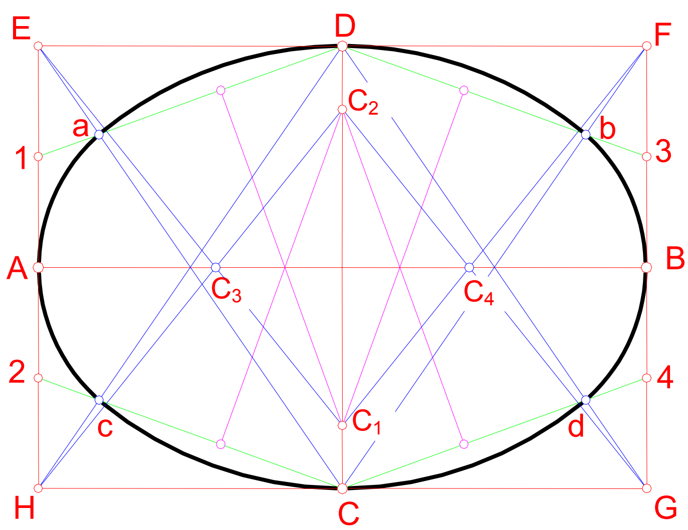


Fig. 197

Los puntos de tangencia se hallan trazando las rectas que unen todos los centros.

D) Óvalo de cuatro centros dados los dos ejes.(segundo procedimiento). Fig. 197.

Se construye el rectángulo formado por el eje mayo y menor ***AB*** y ***CD*** dados.

Dividimos el lado ***EH*** y ***FG*** en cuatro partes Iguales.

Unimos ***C*** con ***E*** y ***F*** así como D con ***G*** y ***H*** .

Unimos el punto ***D*** con ***1*** y ***3***, así como ***C*** con ***2*** y ***4*** obteniendo los puntos de tangencia, ***a, b, c, d***.

Trazamos la mediatriz de los segmentos ***aD***, ***Bd, Cc***, ***Cd***. Obteniendo los centros ***C1*** y ***C2***.

Unimos ***C1*** con ***E*** y con ***F***, obteniendo los centros ***C3*** y ***C4***.

27) Ovoide.

El ovoide presenta un solo eje de simetría y tiene la foma de un huevo, se construye también por arcos de circunferencia.

a) Ovoide dado el eje menor CD. Fig. 198.

Sea el eje menor CD

Trazamos la mediatriz del eje CD dado.

Trazamos la circunferencia diámetro el eje menor.

Los puntos ***C*** y ***D*** Serán los centros ***O1*** y ***O2***.

Los Unimos con ***O4*** y tendremos los puntos de tangencia ***a*** y ***b***.

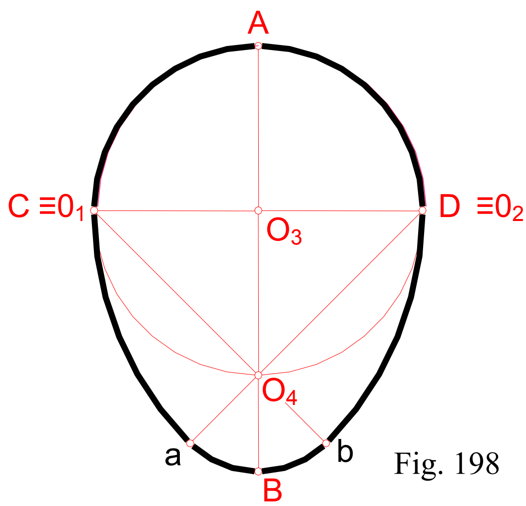


Fig. 198

b) Ovoide dado el eje mayor AB. Fig. 199.

Dividimos el eje dado en seis partes Iguales.

Por la división ***2*** trazamos una perpendicular a la recta ***AB***.

Sobre ella llevamos cuatro divisiones. Centros ***C3*** y ***C4***.

Con centro en la división ***2*** trazamos una semicircunferencia de radio ***2*** divisiones.
centro ***C1***.

El centro ***C4*** estará en la división ***5***.

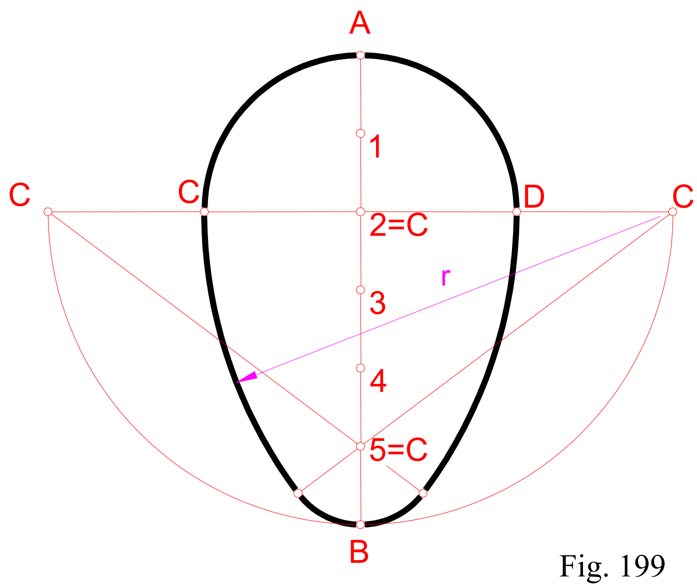


Fig. 199

c) ***Ovoide común a dos circunferencias dadas. Fig. 200.***

Sean las circunferencias de centro ***O1*** y ***O2***.

Tendremos que fijar un punto de contacto, p.e el ***T***. Siendo su simétrico ***T'.***

El problema se reduce a determinar las circunferencias tangentes a dos circunferencias conocido el punto de tangencia en una de ellas.

Lo ejecutaremos por dilataciones. Para ello restamos los radios de ambas circunferencias y con el resultado trazamos otra con centro en
O1.

Bastará con trazar una circunferencia que pase por los puntos ***T1*** y ***O2***. Deshaciendo a continuación la dilatación.

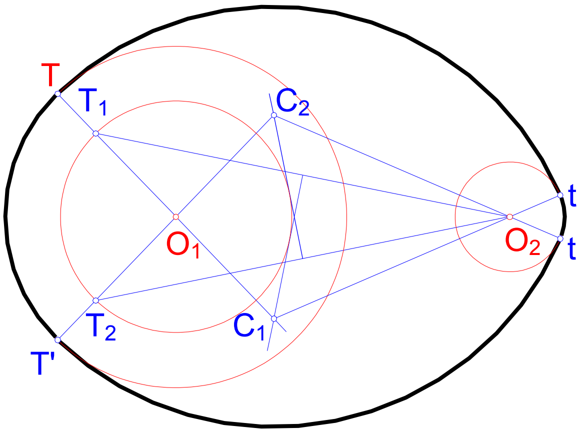


Fig. 200

SEPTIMA UNIDAD. Cónicas.

Contenido:
Elipse
Parábola
Hipérbola.

28) Elipse.

28.1. Generalidades

Se llama elipse al lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos del mismo plano llamados focos ***c*** , es constante e igual ***2a***. Siendo ***a*** el valor del eje mayor. y las rectas que los unen el punto de la elipse ***P*** radio vectores, que representaremos por ***r*** y ***r'***. Entre ellos existe la siguiente relación ***r + r' = 2a. Fig. 201***

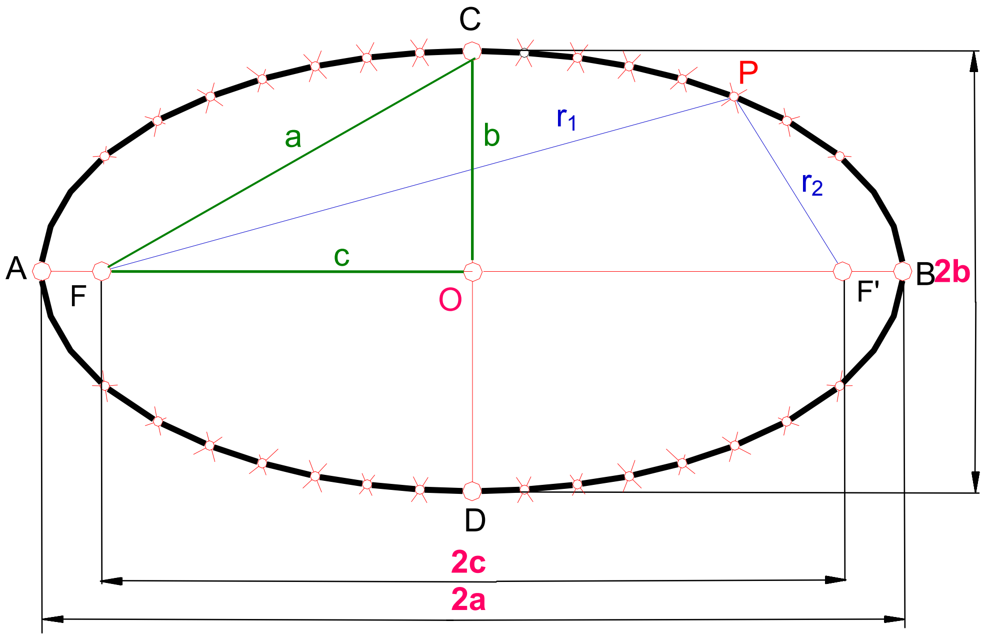


Fig. 201

La elipse tiene dos ejes perpendiculares que se cortan en su punto medio O. El eje mayor los representaremos por ***2a***, y el menor por ***2b***. A la distancia focal la llamaremos ***2c***.

Los semiejes los representaremos ***a***, ***b*** y ***c***, y entre ellos existe la relación siguiente: $a^2 = b^2 + c^2$.

Para comprobarlo bastará con aplicar la propiedad que la define:

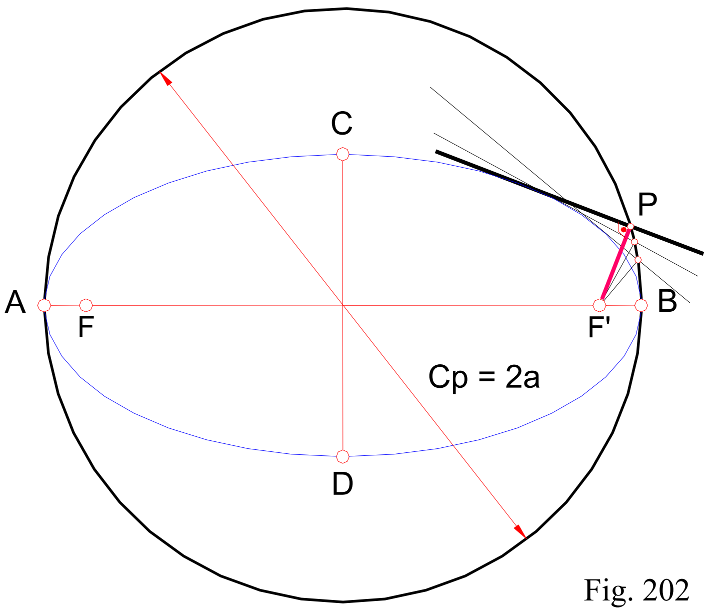


Fig. 202

AF + AF' = 2a. Como, ***AF = BF'*** tendremos que ***AF' + BF' = 2a***

28.2. Circunferencia principal *Cp*

La circunferencia principal ***Cp*** tiene por centro el de la elipse y radio a. Fig. 202.

Se define como el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por los focos a las tangentes a la curva.

28.3. Circunferencia Focal *Cf*

Tiene como centros los focos ***F*** y ***F'*** y como radio el eje mayor ***2a***. Tendremos dos circunferencias focales. Fig. 203.

Se define como el lugar geométrico de los puntos simétricos del foco con respecto a las tangentes a la curva.

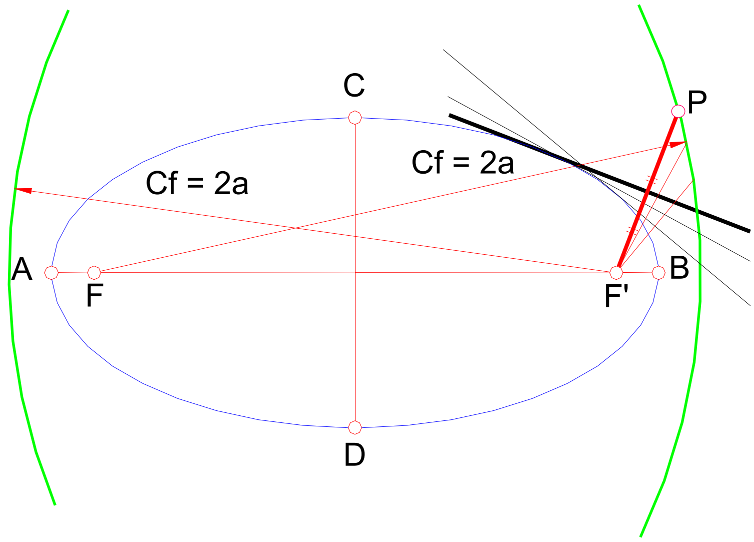


Fig. 203

28.4. Construcción de la elipse

a) Método del jardinero

Este método aplica la propiedad de la curva ***r + r' = 2ª.*** Y se aplica principalmente para construcciones en jardineria.

Se coloca un clavo o chicheta en cada foco, y se fijan con ello los extremos de un hilo de longitud 2a. Con lápiz o punzon se tensa y se describe la curva.

b) Dado el eje mayor y el menor, construir la elipse por medio de puntos. Fig. 204.

Para su construcción nos basamos en la propiedad de la elipse r + r' = 2ª

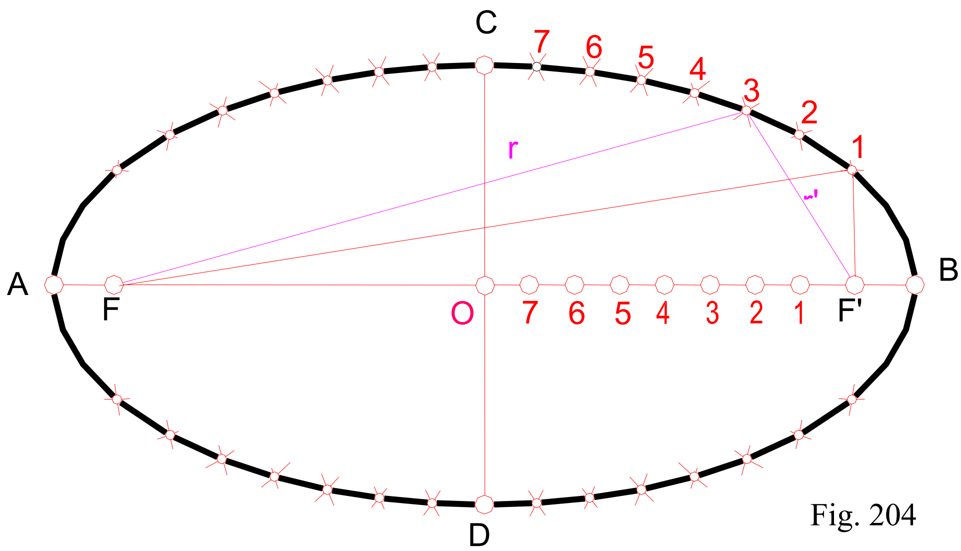


Fig. 204

Una vez fijados los ejes y los focos, elegimos en el semieje ***O F'*** un número de divisiones por ejemplo de ***1*** a ***7***.

Con la distancia de ***A*** a la división ***1*** y haciendo centro en ***F*** trazamos un arco.

Con la distancia de ***B*** a ***1*** y haciendo centro en ***F',*** trazamos un arco que cortará al anterior en el punto ***1'.***

Repitiendo la operación para los distintos puntos obtendremos la elipse.

En su construcción hay que tener en cuenta que la curva es simétrica con respecto a dos ejes.

b) *Dado el eje mayor de la elipse y el menor, construir la curva por medio de haces proyectivos. Fig. 205.*

En primer lugar construimos el paralelogramo ***ABCD.***

Dividimos el semieje ***O b***, en un número de partes iguales, por ejemplo **siete**.

Dividimos en el mismo número, el lado menor ***bC***.

Se unen las divisiones entre si.

Repetimos la operación hasta obtener la curva completa.

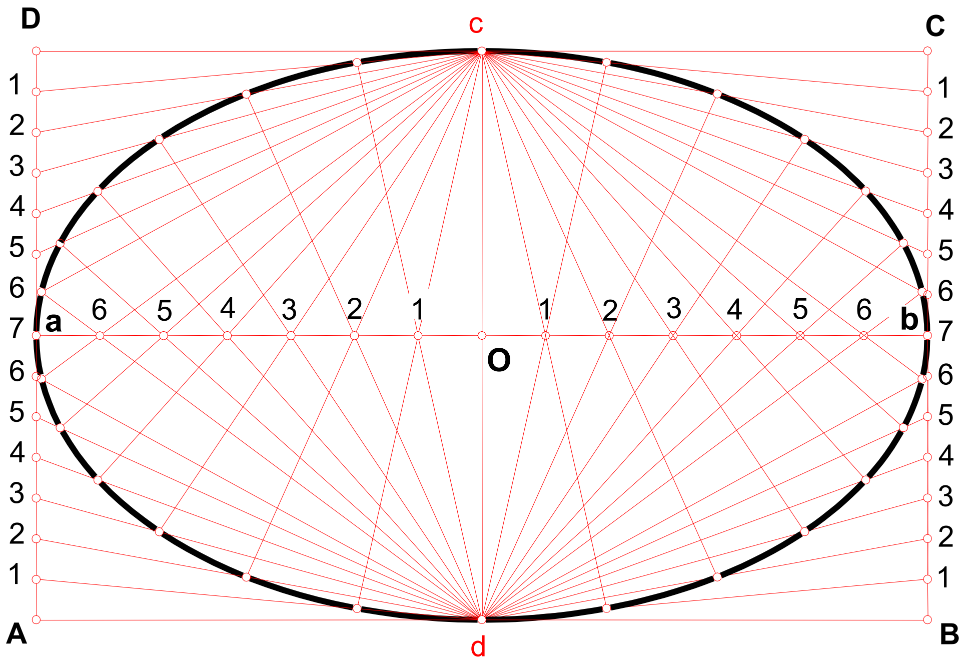


Fig. 205

c) *Dados los diámetros conjugados, construir la elipse por haces proyectivos. Fig. 206.*

El procedimiento es similar al visto con anterioridad.

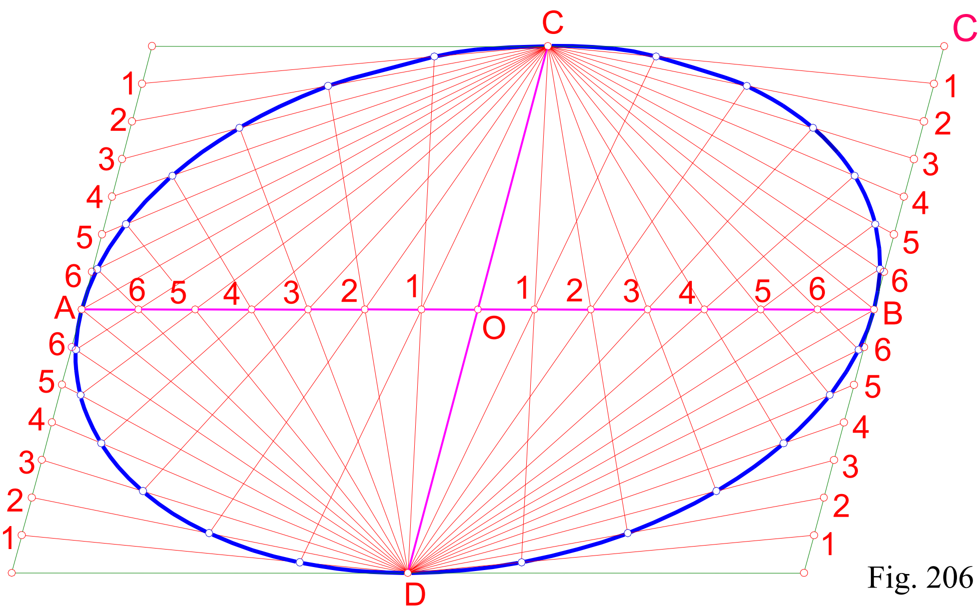


Fig. 206

d) *Dado el eje mayor de la elipse y el menor, construir la curva por medio de afinidad. Fig. 207.*

Aplicaremos la relación de afinidad entre circunferencia y elipse.

Trazamos los ejes ***AB*** y ***CD***

Trazamos dos circunferencias de radio eje mayor ***AB*** y menor ***CD.***

Dividimos una de las circunferencias en un numero de partes iguales.

Unimos dichas divisiones con el centro ***O***.

Por el punto de división ***1*** trazamos una paralela eje menor. Y por el punto de división ***3*** otra paralela al eje mayor. Ambas se cortan en ***a***, primer punto de la curva.

Repetimos la operación tantas veces como puntos hallamos elegido.

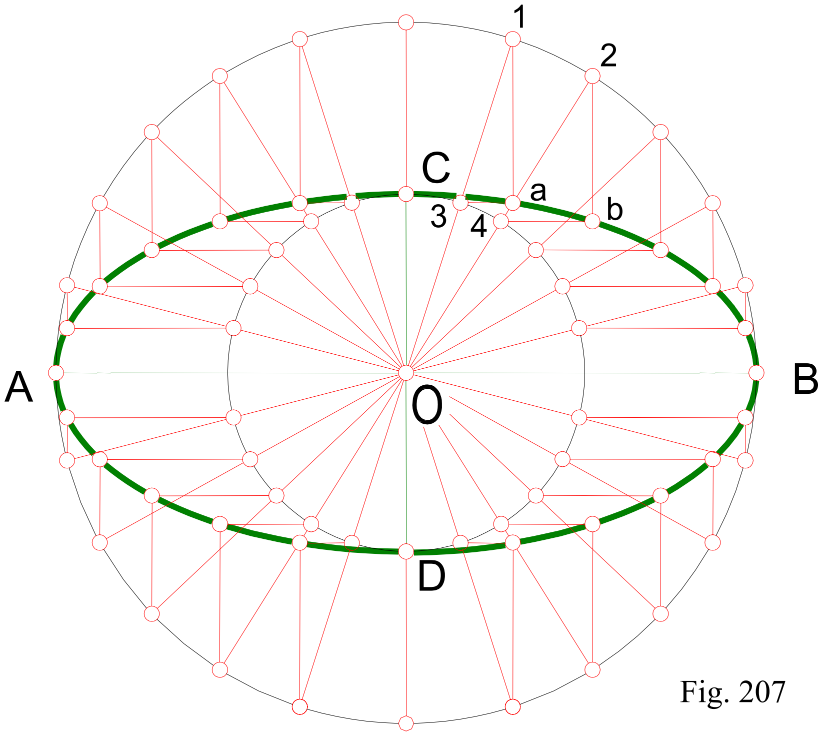


Fig. 207

28.5. Hiperbola

La hipérbola es una curva abierta de dos ramas y se define como; el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual al eje mayor. ***(r1 - r2 = 2a). Fig. 208.***

La curva es simétrica, tiene dos ejes que se cortan en su punto medio y son ortogonales.

La hipérbola tiene un eje real ***AB* = *2a***. Y un eje imaginario: ***2b***. La distancia focal la representaremos por: ***F F' = 2c***

Entre el eje real, eje imaginario y distancia focal existe la siguiente relación.

c2 = a2 + b2

Considerando un punto cualquiera ***P*** en la hipérbola, se denomina radio vectores a la distancia del punto a cada uno de los focos. Debe cumplirse que: **r1 - r2 = 2a**

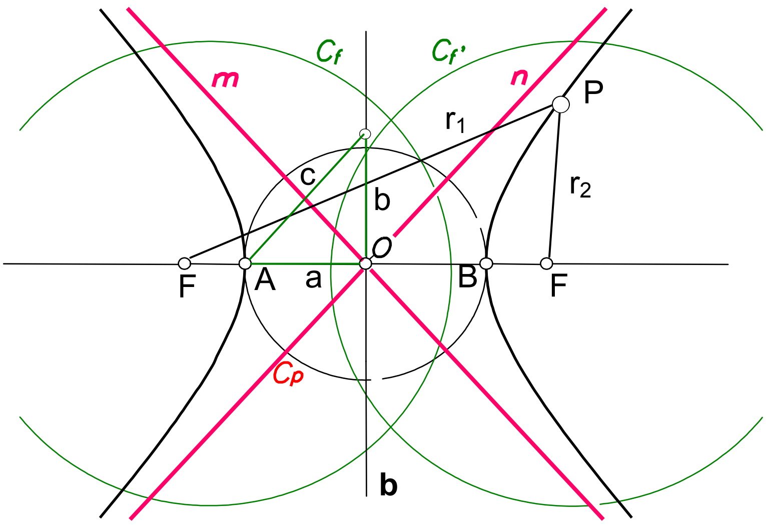


Fig. 208

Asíntotas: son las rectas tangentes a la curva en el infinito.

28.5.1. Construcción de la Hiperbola

a) Trazar la hipérbola por radio vectores dado el eje real y el eje imaginario. Fig. 209.

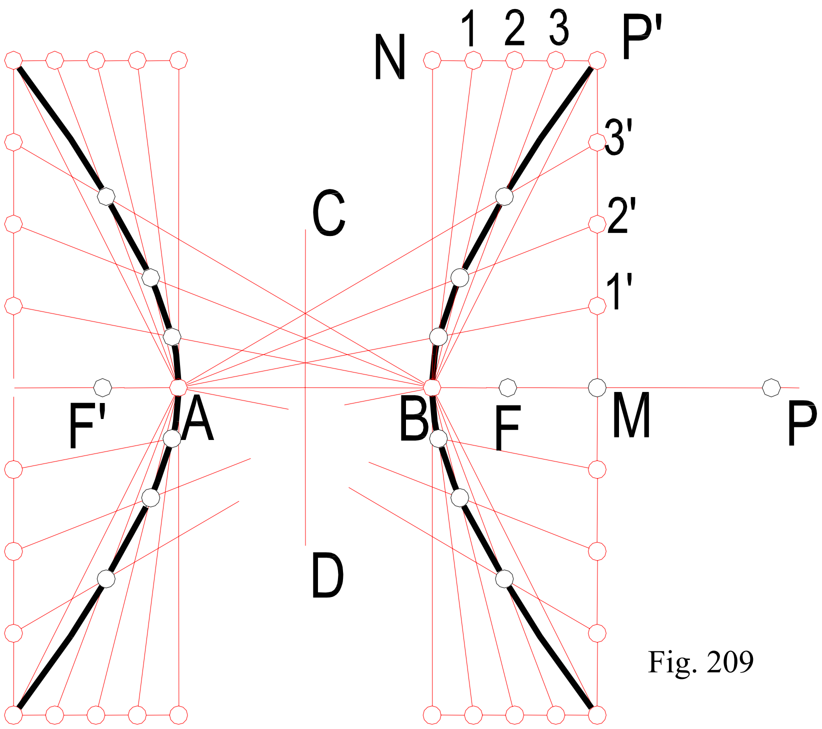


Fig. 209

Debemos de hallar el valor de la distancia focal. Para ello tendremos en cuenta la propiedad de la hipérbola en la que ***c2 = a2 + b2***. Por tanto construiremos un triángulo rectángulo en el que un cateto sea el semieje real y el otro el imaginario. Fig. 210.

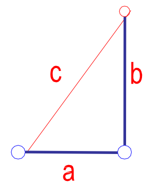


Fig. 210

Teniendo en cuenta otra propiedad de la hipérbola en la que la diferencia de los radios vectores es igual al eje real ***r – r' = 2a,*** hallaremos los distintos puntos de la curva.

Tomamos un número determinado de puntos a la derecha de uno de los focos, por ejemplo cinco. Seguidamente con la distancia desde ***A*** al punto ***1*** y haciendo centro en el foco ***F*** se traza un arco. A continuación con la distancia de ***B*** al mismo punto ***(1)*** y haciendo centro ***F'*** se traza otro arco que cortará al anterior en el punto ***1'.*** De la misma forma se repite par el resto de los puntos

a) Trazar la hipérbola por haces proyectivos. Fig. 211.

Se traza un punto cualquiera de la hipérbola el punto ***P*** por ejemplo.

Construimos el rectángulo ***B M P' N***.

Dividimos ***MP'*** y ***BN***, en el mismo número de partes iguales.

El resto de la construcción se deduce de la figura.

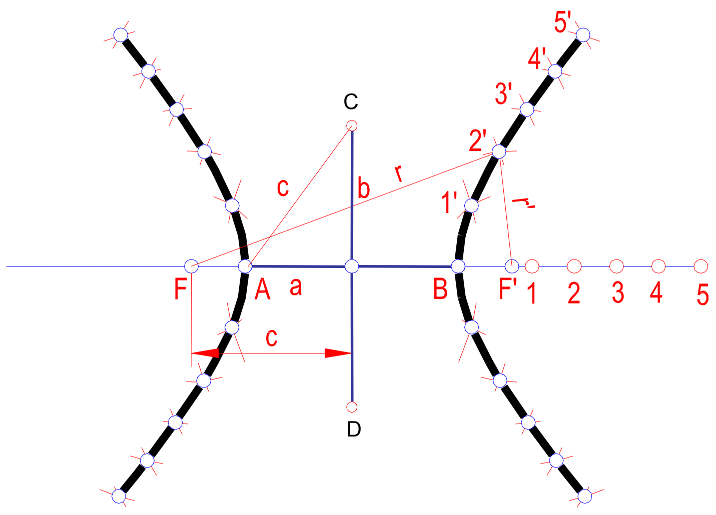


Fig. 211

b) Trazar la hipérbola por tangentes a la curva. Fig. 212.

Para su construcción nos basaremos en la propiedad de la circunferencia principal que se define como el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas por el foco a las tangentes a la curva.

Partimos del eje real AB y los focos F-F'.

Trazamos la circunferencia principal ***Cp***.

Se toman en la ***Cp*** una serie de divisiones, que unimos con el foco ***F***.

Trazamos los pies de las perpendiculares de las rectas anteriores. Finalizamos trazando la curva.

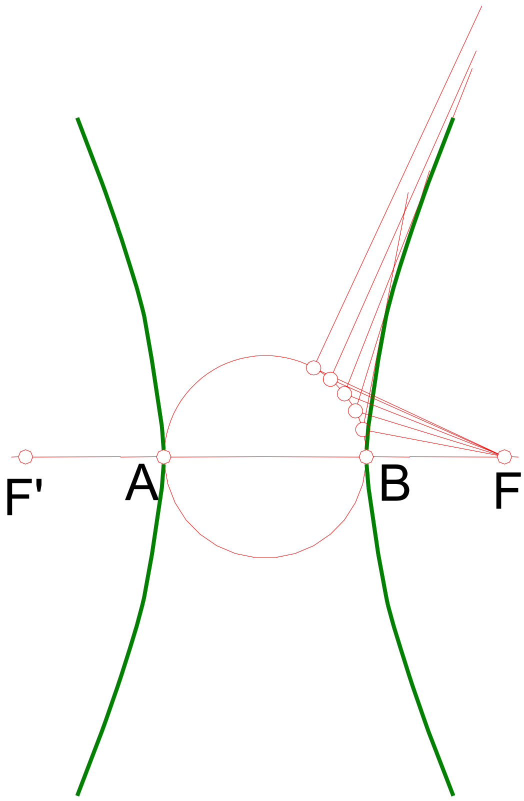


Fig. 212

28.6. Parábola

DEFINICIÓN: Es una curva plana, abierta, de una sola rama; y se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan del foco y de la directriz ***FP = PF'. Fig. 213.***

Eje de la parábola e: es la recta perpendicular a la directriz, que pasa por el foco.

Parámetro *FP*: Es la longitud de la cuerda que es perpendicular al eje en el foco ***p.***

Vértice *V*: Es un punto que equidista de la directriz y del foco. Su distancia a cada uno de ellos es ***p/2***, es decir la mitad del parámetro.

Radios vectores: Segmentos que distan del foco y de la directriz ***r*** y ***r' .***

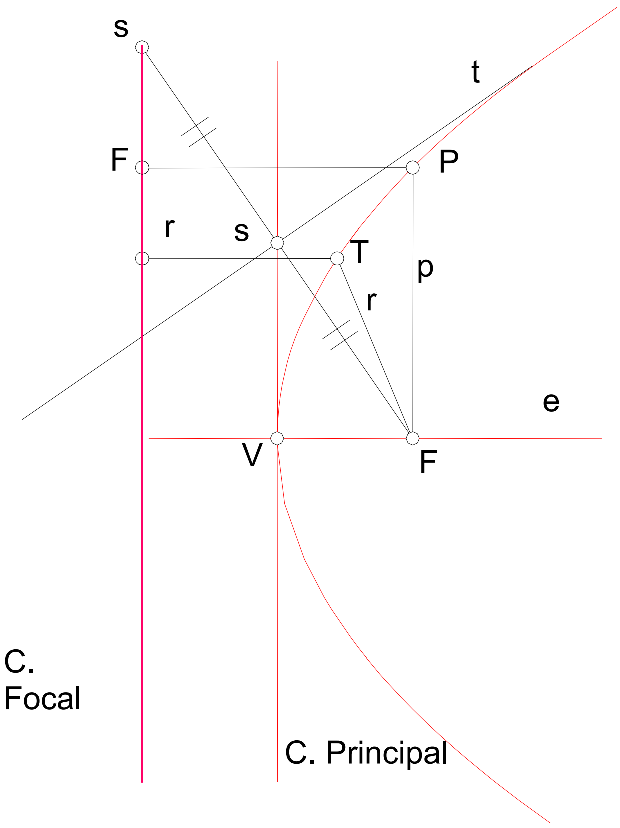


Fig. 213

Circunferencia principal: Es la recta tangente a la curva en el vértice.

Circunferencias focales: Es la recta directriz. En este caso de radio infinito.

La proyección del foco sobre una tangente está en la circunferencia principal

El punto simétrico de F, respecto de una tangente, está en la directriz.

28.6.1. Construcción de la Parábola

a) Construcción de la parábola por radio vectores. Fig. 214.

A partir de ***V*** se toman un número de partes iguales, tantas como puntos deseemos obtener, y trazamos perpendiculares al eje.

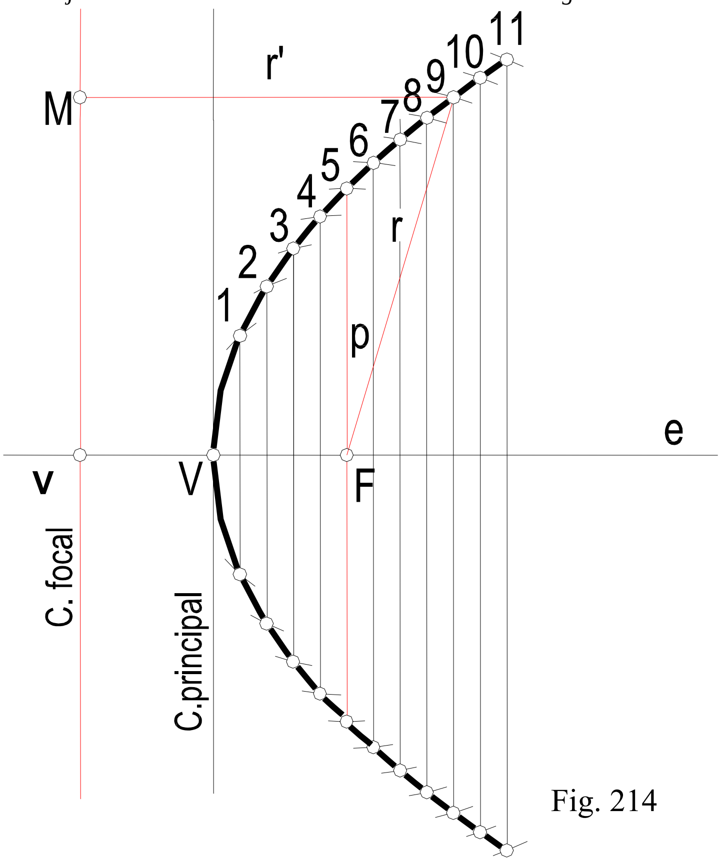


Fig. 214

Teniendo en cuenta la propiedad de la parábola ***r = r',*** se toman las distancias desde la directriz a cada división y haciendo centro en el foco, cortamos a cada una de ellas, obteniendo los diferentes puntos de la curva.

b) Construcción de la parábola por puntos, por medio haces proyectivos. Fig. 215.

Hallamos un punto cualquiera de la parábola ***P***.

Construimos el rectángulo ***P-P'-6-6'.***
Dividimos ***P-6***, en un mismo número de partes iguales, que unimos con ***V***.

Dividimos ***V-6*** en el mismo número de partes y trazamos paralela al eje.

Las rectas anteriores nos determinaran los puntos de la curva.

c) Construcción de la parábola por puntos, a partir de la circunferencia principal. Fig. 216.

Nos basamos de nuevo en la propiedad de la circunferencia principal.

Tomamos en la circunferencia principal ***Cp*** una serie de divisiones.

Unimos cada una de las divisiones con el foco ***F***, y trazamos las perpendiculares ***1,2,…….***

Las rectas anteriores serán sucesivamente tangentes a
la parábola.

El otro ala de la curva será simétrico.

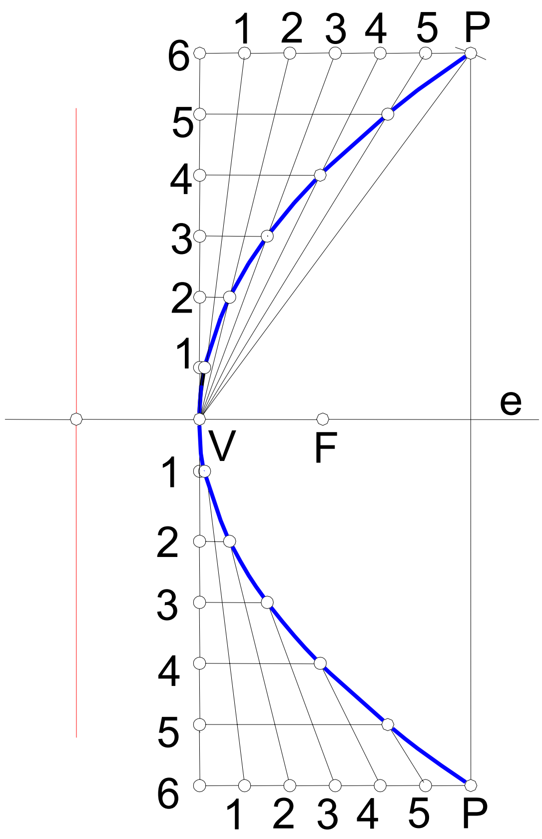


Fig. 215

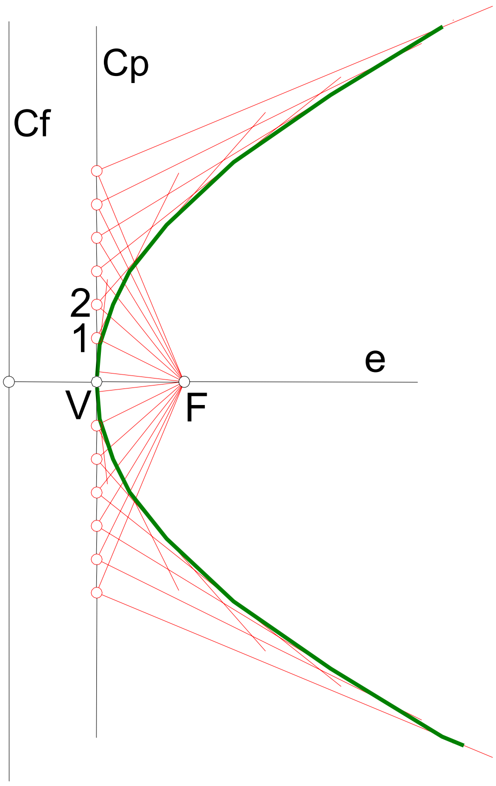


Fig. 216